Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi

LOGIKA MATEMATIKA

Kemampuan berpikir logis, abstrak dan terstruktur adalah modal utama untuk menguasai teknologi, khususnya teknologi komputer. Kemampuan ini dapat dibentuk melalui serangkaian latihan dan kebiasaan menyelesaikan soal. Otak menjadi terbiasa menyelesaikan masalah secara logis, terstruktur, dengan selalu mencari abstraksi intisari permasalahan. Buku ini merupakan sarana untuk melatih otak agar memiliki pola pikir yang demikian.

Mengingat pentingnya kemampuan pola pikir yang logis, di setiap kurikulum perguruan tinggi jurusan informatika/komputer pasti memuat kuliah logika. Buku ini disusun untuk membantu mahasiswa/dosen untuk mendalaminya

Apa yang ada dalam buku ini?

Buku ini memuat materi tentang Logika Matematika, Teori Himpunan, Relasi dan Fungsi. Semua materi tersebut berguna untuk melatih daya pikir logis, abstrak dan terstruktur. Oleh karenanya, materi dalam buku ini diajarkan di tahun pertama sebagai bagian dari kurikulum wajib mahasiswa jurusan informatika/komputer oleh mayoritas akademi/universitas di Indonesia.

Untuk Siapa?

Buku ini cocok dipakai oleh mahasiswa maupun dosen jurusan informatika/komputer (Teknik Informatika, Teknik Komputer, Manajemen Informatika, Ilmu Komputer, dll) sebagai pendukung kuliah Logika. Buku ini dapat dipakai sebagai alat bantu memahami konsep materi melalui latihan dengan berbagai versi soal.

Apa keuntungan pemakaian buku ini?

- Memuat lebih dari 400 soal dalam berbagai jenis, lengkap dengan penyelesaiannya sehingga sangat membantu untuk memahami materi. Hanya sedikit teori dibahas di awal tiap bab.
- Memuat lebih dari 100 soal tambahan untuk latihan mandiri.
- Tiap latihan soal diselesaikan langkah demi langkah secara terstruktur untuk mempermudah pemahaman.
- Menggunakan bahasa dan kalimat yang sederhana dan mudah dipahami

KOMPUTER - TEKS
ISBN: 978-979-29-4309-2

Penerbit ANDI
Jl. Beo 38-40 Yogyakarta
Telp.(0274) 561881 Fax. (0274) 588282
e-mail: penerbitan@andipublisher.com
website: www.andipublisher.com

LOGIKA MATEMATIKA
Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi
Jong Jek Siang

PENERBIT ANDI®

LOGIKA MATEMATIKA

Soal dan Penyelesaian Logika,
Himpunan, Relasi,
Fungsi

Apa keuntungan pemakaian buku ini? Memuat lebih dari 400 soal dalam berbagai jenis, lengkap dengan penyelesaiannya sehingga sangat membantu untuk memahami materi. Hanya sedikit teori dibahas di awal tiap bab, Memuat lebih dari 100 soal tambahan untuk latihan mandiri, Tiap latihan soal diselesaikan langkah demi langkah secara terstruktur untuk mempermudah pemahaman, Menggunakan bahasa dan kalimat yang sederhana dan mudah dipahami

Jong Jek Siang

LOGIKA MATEMATIKA

SOAL DAN PENYELESAIAN

Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi

JONG JEK SIANG

PENERBIT ANDI YOGYAKARTA

Logika Matematika
Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi
Oleh: Jong Jek Siang

Editor : Fl. Sigit Suyantoro
Setting : Pipiet
Desain Cover : Bowo
Korektor : Venan

Penerbit: C.V ANDI OFFSET (Penerbit ANDI)
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Percetakan: ANDI OFFSET
Jl. Beo 38-40, Telp. (0274) 561881 (Hunting), Fax. (0274) 588282 Yogyakarta 55281

Perpustakaan Nasional: Katalog dalam Terbitan (KDT)

Siang, Jong Jek

Logika Matematika – Soal dan Penyelesaian Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi/

Jong Jek Siang; – **Ed. I .** – Yogyakarta: ANDI,

23 22 21 20 19 18 17 16 15 14

x + 246 hlm .; 16 x 23 Cm.

10 9 8 7 6 5 4 3 2 1

ISBN: 978 – 979 – 29 – 4309 – 2

I. Judul

1. Mathematics

DDC'21 : 510

Untuk :

Mien, Kevin, dan Elva, mata air semangat

dan harapanku

KATA PENGANTAR

Matematika Diskrit adalah cabang ilmu matematika yang memelajari obyek-obyek diskrit. Matematika diskrit sangatlah diperlukan sebagai landasan untuk menguasai ilmu informatika/komputer, seperti Algoritma, Teknik Pemrograman, Kriptografi, Sistem Digital, dan lain-lain. Mengingat cakupannya sangat luas, biasanya perkuliahan Matematika Diskrit dipecah menjadi beberapa kuliah dengan berbagai nama, seperti Logika Matematika, Matematika Informatika, Matematika Diskrit, Teori Graf, dan lain-lain.

Buku ini membahas bagian awal dari Matematika Diskrit, yaitu Logika Matematika, yang biasanya diajarkan di tahun-tahun awal perkuliahan. Topik yang dibahas meliputi Dasar-dasar Logika, Himpunan, Relasi dan Fungsi. Dari pengalaman penulis mengajar, 80% dari materi di buku ini dapat diselesaikan oleh mahasiswa tahun pertama dalam perkuliahan 3 SKS.

Bab 1 membahas tentang Logika, yang meliputi Logika Dasar, Logika Berkuantor maupun Rangkaian Logika. Bab ini merupakan "makanan pokok" dalam mempelajari Matematika Diskrit karena mengajarkan cara berpikir abstrak dan membuat kesimpulan secara logis berdasar fakta.

Bab 2 membahas tentang Teori Himpunan, yang membahas tentang konsep abstrak himpunan, seperti Himpunan Kosong, Himpunan Kuasa, pembuktian yang melibatkan himpunan. Teori Himpunan merupakan materi tambahan agar pembaca semakin mampu berpikir abstrak. Sebelum membaca Bab 3 (Relasi) dan 4 (Fungsi), materi tentang himpunan haruslah dipahami dengan baik, mengingat banyak bagian pada materi relasi dan fungsi yang membutuhkan penguasaan konsep Teori Himpunan.

Bab 3 membahas tentang relasi yang menghubungkan beberapa himpunan. Pembahasan meliputi konsep Relasi Ekuivalensi, Relasi Partial Order, dan Lattice.

Bab 4 membahas tentang Fungsi. Materi yang dibicarakan tidak hanya fungsi atas bilangan riil, tetapi juga meliputi fungsi yang didefinisikan atas berbagai himpunan seperti himpunan kuasa, himpunan dtring, dan lain-lain. Di samping itu juga dibahas tentang konsep fungsi bijektif yang merupakan konsep dasar invers fungsi.

Bagi pembaca yang baru pertama kali belajar berpikir abstrak, materi dalam buku ini memang tampak membingungkan. Dengan memelajari soal-soal latihan beberapa kali, konsep abstrak dengan sendirinya akan terbentuk. Konsep abstrak ini sangat diperlukan bagi seseorang yang berpikir logis. Pola pikir logis menjadi dasar penguasaan ilmu komputer.

Pendekatan yang digunakan dalam penyusunan buku ini mirip dengan seri "Schaum". Tiap bab diawali dengan sedikit teori. Bagian utamanya, yaitu latihan soal dan teknik penyelesaian dibahas di bagian berikutnya. Sebagian dari soal latihan adalah soal ujian yang saya berikan pada mahasiswa saya, dan sebagian lain saya ambil dari buku yang ada di daftar pustaka. Pembahasan latihan soal dilakukan dengan detil supaya pembaca dapat mengerti dengan baik teknik penyelesaiannya. Tiap bab diakhiri dengan soal-soal tambahan yang dapat digunakan oleh pembaca untuk menguji kemampuan. Jika latihan soal sudah dikuasai, mayoritas soal-soal tambahan akan dapat dikerjakan dengan mudah.

Penulis berterima kasih untuk dukungan moril dan semangat yang tak henti-hentinya dari keluarga penulis dalam penyelesaian naskah ini. Buku ini tidak akan pernah terselesaikan tanpa dorongan yang diberikannya. Penulis juga berterima kasih pada Penerbit Andi atas kerjasamanya selama ini. Terima kasih juga penulis ucapkan pada pembaca yang telah membaca buku ini. Kritik, ide dan saran yang membangun sangat diharapkan demi pengembangan buku ini. Akhirnya, pada sang Khalik yang sudah menganugerahkan hidup, kemampuan, waktu dan semangat, penulis hanya mampu sujud bersyukur.

Gloria in Excelsis Deo

Yogyakarta, Akhir 2013

Penulis

j_j_siang@yahoo.com

DAFTAR ISI

BAB 1

Logika dan Aljabar Boole

1.1 Logika Proposisi

Kalimat Deklaratif (Proposisi) adalah kalimat yang bernilai benar atau salah, tapi tidak keduanya.

Contoh 1.1

- "4 adalah bilangan prima" adalah suatu kalimat deklaratif dengan nilai salah.
- "Jakarta adalah ibukota negara Indonesia" adalah suatu kalimat deklaratif dengan nilai benar.
- "Di manakah letak pulau Bali?" bukan kalimat deklaratif karena merupakan kalimat tanya sehingga tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya.
- "x + y = 2" bukan kalimat deklaratif karena kebenaran kalimat tergantung dari nilai x dan y.

Semua kalimat yang masih mengandung variabel bukanlah kalimat deklaratif. Cara mengubahnya menjadi kalimat deklaratif dapat dilihat pada Subbab 1.3.

Dalam logika, dua atau lebih kalimat deklaratif dapat dihubungkan dengan penghubung kalimat. Dalam logika tidak disyaratkan adanya korelasi arti di

LOGIKA MATEMATIKA

SOAL DAN PENYELESAIAN

Logika, Himpunan, Relasi, Fungsi

JONG JEK SIANG

Kita menjalani hidup dari apa yang kita dapatkan

Tetapi kita menikmati hidup dari apa yang kita berikan

KATA PENGANTAR

Matematika Diskrit adalah cabang ilmu matematika yang mempelajari obyek-obyek diskrit. Matematika Diskrit sangatlah diperlukan sebagai landasan untuk menguasai ilmu informatika/komputer, seperti Algoritma, Teknik Pemrograman, Kriptografi, Sistem Digital, dan lain-lain. Mengingat cakupannya yang sangat luas, biasanya perkuliahan Matematika Diskrit dipecah menjadi beberapa kuliah dengan berbagai nama, seperti Logika Matematika, Matematika Informatika, Matematika Diskrit, Teori Graf, dan lain-lain

Buku ini membahas bagian awal dari Matematika Diskrit, yaitu Logika Matematika, yang biasanya diajarkan di tahun-tahun awal perkuliahan. Topik yang dibahas meliputi Dasar-dasar Logika, Himpunan, Relasi dan Fungsi. Dari pengalaman penulis mengajar, 80 % dari materi di buku ini dapat diselesaikan oleh mahasiswa tahun pertama dalam perkuliahan 3 SKS

Bab 1 membahas tentang Logika, yang meliputi Logika Dasar, Logika Berkuantor maupun Rangkaian Logika. Bab ini merupakan “makanan pokok” dalam mempelajari Matematika

Diskrit karena mengajarkan cara berpikir abstrak dan membuat kesimpulan secara logis berdasar fakta.

Bab 2 membahas tentang Teori Himpunan, yang membahas tentang konsep abstrak himpunan, seperti Himpunan Kosong, Himpunan Kuasa, pembuktian yang melibatkan himpunan. Teori Himpunan merupakan materi tambahan agar pembaca semakin mampu berpikir abstrak. Sebelum membaca bab 3 (Relasi) dan 4 (Fungsi), materi tentang Himpunan haruslah dipahami dengan baik, mengingat banyak bagian pada materi Relasi dan Fungsi yang membutuhkan penguasaan konsep Teori Himpunan.

Bab 3 membahas tentang Relasi yang menghubungkan beberapa himpunan. Pembahasan meliputi konsep Relasi Ekuivalensi, Relasi Partial Order, dan Lattice.

Bab 4 membahas tentang Fungsi. Materi yang dibicarakan tidak hanya fungsi atas bilangan riil, tetapi juga meliputi fungsi yang didefinisikan atas berbagai himpunan seperti himpunan kuasa, himpunan string, dan lain-lain. Disamping itu juga dibahas tentang konsep fungsi bijektif yang merupakan konsep dasar invers fungsi.

Bagi pembaca yang baru pertama kali belajar berpikir abstrak, materi dalam buku ini memang tampak membingungkan.

Dengan mempelajari soal-soal latihan beberapa kali, konsep abstrak dengan sendirinya akan terbentuk. Konsep abstrak ini sangat diperlukan bagi seseorang yang berpikir logis. Pola pikir logis menjadi dasar penguasaan ilmu komputer

Pendekatan yang digunakan dalam penyusunan buku ini mirip dengan seri "Schaum". Tiap bab diawali dengan sedikit teori. Bagian utamanya, yaitu latihan soal dan teknik penyelesaiannya dibahas di bagian berikutnya. Sebagian dari soal latihan adalah soal ujian yang saya berikan pada mahasiswa saya, dan sebagian lain saya ambil dari buku yang ada di daftar pustaka. Pembahasan latihan soal dilakukan dengan detil supaya pembaca dapat mengerti dengan baik teknik penyelesaiannya. Tiap bab diakhiri dengan soal-soal tambahan yang dapat digunakan oleh pembaca untuk menguji kemampuan. Jika latihan soal sudah dikuasai, mayoritas soal-soal tambahan dapat dikerjakan dengan mudah.

Penulis berterima kasih untuk dukungan moril dan semangat yang tak henti-hentinya dari keluarga penulis dalam penyelesaian naskah ini. Buku ini ini tidak akan pernah terselesaikan tanpa dorongan yang diberikannya. Penulis juga berterima kasih pada Penerbit Andi atas kerjasamanya selama ini. Terima kasih juga penulis ucapkan pada pembaca yang telah

membaca buku ini. Kritik, ide dan saran yang membangun sangat diharapkan demi pengembangan buku ini. Akhirnya, pada sang Khalik yang sudah menganugerahkan hidup, kemampuan, waktu dan semangat, penulis hanya mampu sujud bersyukur.

Gloria in Excelsis Deo

Yogyakarta, Akhir 2013

Penulis

j_j_siang@yahoo.com

Untuk

Mien, Kevin, dan Elva, mata air semangat dan harapanku

Bab 1

Logika dan Aljabar Boole

1.1 Logika Proposisi

Kalimat Deklaratif (Proposisi) adalah kalimat yang bernilai benar atau salah, tapi tidak keduanya.

Contoh 1.1

- "4 adalah bilangan prima" adalah suatu kalimat deklaratif dengan nilai salah
- "Jakarta adalah ibukota negara Indonesia" adalah suatu kalimat deklaratif dengan nilai benar
- "Dimanakah letak pulau Bali ? " bukan kalimat deklaratif karena merupakan kalimat tanya sehingga tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya
- "x + y = 2" bukan kalimat deklaratif karena kebenaran kalimat tergantung dari nilai x dan y.

Semua kalimat yang masih mengandung variabel bukanlah kalimat deklaratif. Cara untuk mengubahnya menjadi kalimat deklaratif dapat dilihat pada bab 1.3

Dalam logika, dua atau lebih kalimat deklaratif dapat dihubungkan dengan penghubung kalimat. Dalam logika tidak disyaratkan adanya korelasi arti diantara kedua kalimat penyusunnya. Penekanan lebih ditujukan kepada bentuk/susunan kalimat saja (sintaks), dan bukan pada arti kalimat penyusunnya dalam kehidupan sehari-hari (semantik). Kebenaran keseluruhan kalimat semata-mata hanya tergantung pada nilai kebenaran kalimat penyusunnya, dan tidak tergantung pada ada/tidaknya relasi antara kalimat-kalimat penyusunnya.

Jika p dan q adalah kalimat, maka tabel kebenaran penghubung tampak pada tabel 1.1 (T = True/benar ; F = False/salah). Secara umum, jika ada n variabel (p, q,...), maka tabel kebenaran memuat 2^n baris.

Tabel 1.1

p	**q**	$\neg p$ **Tidak p**	$p \wedge q$ **p dan q**	$p \vee q$ **p atau q**	$p \Rightarrow q$ **Jika p maka q**	$p \Leftrightarrow q$ **P bila dan hanya bila q**
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

Implikasi $p \Rightarrow q$ dapat pula dibaca sebagai "bila p maka q", "q apabila p", "p hanya bila q".

Pada implikasi $p \Rightarrow q$, p adalah syarat cukup untuk q, sedangkan q adalah syarat perlu untuk p

Contoh 1.2

Misal p : "hari ini panas" dan q : "hari ini cerah"

- Kalimat "Hari ini tidak panas tapi cerah" disimbolkan dengan $\neg p \wedge q$
- Kalimat "Hari ini tidak panas dan tidak cerah" disimbolkan dengan $\neg p \wedge \neg q$

- Kalimat "Tidak benar bahwa hari ini panas dan cerah" disimbolkan dengan $\neg(p \wedge q)$

Contoh 1.3

Tabel kebenaran untuk ekspresi logika $(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \vee q)$ tampak pada tabel 1.2

Tabel 1.2

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg(p \vee q)$
T	T	T	T	F	F
T	F	F	T	F	F
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	T	T

Contoh 1.4

Jika p dan q bernilai benar (T) dan r bernilai salah (F), maka nilai kebenaran simbol $p \vee (q \wedge r)$ dapat dilakukan dengan mensubstitusi nilai-nilai kebenaran ke masing masing variabel p, q, r

$T \vee (T \wedge F) \Leftrightarrow T \vee F \Leftrightarrow T$

Tautologi adalah suatu bentuk kalimat yang selalu bernilai benar (T). Dalam tabel kebenaran, suatu Tautologi selalu bernilai T pada semua barisnya.

Kontradiksi adalah suatu bentuk kalimat yang selalu bernilai salah (F). Dalam tabel kebenaran, Kontradiksi selalu bernilai F pada semua barisnya

Contoh 1.5

$(p \wedge q) \Rightarrow q$ merupakan suatu Tautology. Hal ini tampak pada tabel 1.3. Semua baris pada kolom $(p \wedge q) \Rightarrow q$ bernilai T, sehingga $(p \wedge q) \Rightarrow q$ merupakan Tautologi.

Tabel 1.3

p	q	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \Rightarrow q$
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	T

Dua kalimat disebut **Ekuivalen** (secara logika) bila dan hanya bila keduanya mempunyai nilai kebenaran yang sama untuk semua substitusi nilai kebenaran masing-masing kalimat penyusunnya. Jika P dan Q adalah kalimat-kalimat yang ekuivalen, maka dituliskan $P \equiv Q$ (atau $P \Leftrightarrow Q$). Jika $P \equiv Q$ maka $Q \equiv P$ juga.

Contoh 1.6

Kenyataan bahwa $\neg\ \neg p \vee \neg q$ ekuivalen dengan $p \wedge q$ dapat dilihat pada tabel 1.4. Tampak bahwa nilai kebenaran $\neg\ \neg p \vee \neg q$ dan $p \wedge q$ selalu sama pada semua baris. Berarti $\neg\ \neg p \vee \neg q \Leftrightarrow p \wedge q$

Tabel 1.4

p	**q**	$\boldsymbol{\neg p}$	$\boldsymbol{\neg q}$	$\boldsymbol{\neg p \vee \neg q}$	$\neg\ \neg p \vee \neg q$	$p \wedge q$
T	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	F	F

F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	T	F	F

Beberapa hukum ekuivalensi logika adalah sebagai berikut :

1. Hukum Komutatif : $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$; $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
2. Hukum Asosiatif : $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
   $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
3. Hukum Distributif : $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
4. Hukum Identitas : $p \wedge T \Leftrightarrow p$; $p \vee F \Leftrightarrow p$
5. Hukum Ikatan : $p \vee T \Leftrightarrow T$; $p \wedge F \Leftrightarrow F$
6. Hukum Negasi : $p \vee \neg p \Leftrightarrow T$; $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F$
7. Hukum Negasi Ganda : $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
8. Hukum Idempoten : $p \wedge p \Leftrightarrow p$; $p \vee p \Leftrightarrow p$
9. Hukum De Morgan : $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
   $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
10. Hukum Absorbsi : $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$; $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
11. Negasi T dan F : $\neg T \Leftrightarrow F$; $\neg F \Leftrightarrow T$

Dalam membuktikan ekuivalensi $P \Leftrightarrow Q$, ada 2 pendekatan yang bisa dilakukan :

1. Menggunakan tabel kebenaran. Ekuivalensi $P \Leftrightarrow Q$ benar jika kolom P dan kolom Q bernilai sama untuk tiap barisnya.
2. Salah satu kalimat diturunkan terus menerus (dengan menggunakan hukum-hukum yang ada), sehingga akhirnya

didapat kalimat yang lainnya. Secara umum, biasanya bentuk yang lebih kompleks yang diturunkan ke bentuk yang lebih sederhana, atau kedua kalimat (P dan Q) masing-masing diturunkan secara terpisah (dengan menggunakan hukum-hukum yang ada) sehingga akhirnya sama-sama didapat R.

Contoh 1.7

$p \Rightarrow q \quad \Leftrightarrow \neg p \vee q$. Kenyataan ini dapat dilihat dari tabel 1.5.

Tabel 1.5

p	**q**	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Menggunakan contoh 1.7, ingkaran dari implikasi $p \Rightarrow q$ dapat dilakukan menggunakan hukum ekuivalensi logika :

$\neg(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(\neg p \vee q)$ (Transformasi dari $\Rightarrow$ ke $\vee$)

$\Leftrightarrow \neg(\neg p) \wedge \neg q$ (Hukum de Morgan)

$\Leftrightarrow p \wedge \neg q$

Didapat relasi :

$$(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg p \vee q)$$

$$\neg(p \Rightarrow q) \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \neg q$$

Contoh 1.8

Bentuk $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q)$ dapat disederhanakan menggunakan hukum-hukum logika :

$\Leftrightarrow \neg(\neg p) \vee \neg q \;\wedge\; p \vee q$ (hukum de Morgan)

$\Leftrightarrow (p \vee \neg q) \wedge (p \vee q)$ (hukum negasi ganda)

$\Leftrightarrow p \vee \; \neg q \wedge q$ (hukum distributif)

$\Leftrightarrow p \vee F$ (hukum negasi)

$\Leftrightarrow p$ (hukum identitas)

Jadi $\neg(\neg p \wedge q) \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$

Contoh 1.9

Bentuk $\neg \; p \vee \neg q \;\vee\; \neg p \wedge \neg q$

$\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg(\neg q) \;\vee (\neg p \wedge \neg q)$ (hukum de Morgan)

$\Leftrightarrow \neg p \wedge q \;\vee (\neg p \wedge \neg q)$ (hukum negasi ganda)

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (q \vee \neg q)$ (hukum distributif)

$\Leftrightarrow \neg p \wedge T$ (hukum negasi)

$\Leftrightarrow \neg p$ (hukum identitas)

Maka bentuk $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$ dapat disederhanakan menjadi $\neg p$

Misalkan $p \Rightarrow q$ adalah suatu implikasi

Konversnya adalah $q \Rightarrow p$

Inversnya adalah $\neg p \Rightarrow \neg q$

Kontraposisinya adalah $\neg q \Rightarrow \neg p$

Suatu implikasi selalu ekuivalen (nilai kebenarannya sama) dengan kontraposisinya. Akan tetapi suatu implikasi tidak selalu ekuivalen dengan Invers ataupun Konversnya. Hal ini tampak pada tabel 1.6. Nilai kebenaran tiap baris implikasi mula-mula (kolom $p \Rightarrow q$) sama dengan Kontraposisi (kolom $\neg q \Rightarrow \neg p$), tapi tidak semua sama dengan Invers dan Konvers

Tabel 1.6

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	**Konvers** $q \Rightarrow p$	**Invers** $\neg p \Rightarrow \neg q$	**Kontraposisi** $\neg q \Rightarrow \neg p$
T	T	F	F	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	F
F	T	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T	T

Contoh 1.10

Implikasi : "Jika A suatu bujursangkar, maka A merupakan 4 persegi panjang " bernilai benar

Konvers : Jika A merupakan 4 persegi panjang maka A adalah suatu bujursangkar.

Invers : Jika A bukan Bujursangkar, maka A bukan 4 persegi panjang.

Kontraposisi : Jika A bukan 4 persegi panjang, maka A bukan Bujursangkar.

Tampak bahwa Konvers salah. Suatu 4 persegi panjang belum tentu merupakan suatu bujursangkar. Demikian juga Invers. Kalau A bukan Bujursangkar, maka A mungkin saja merupakan 4 persegi panjang.

Kontraposisi bernilai benar. Jika A bukan 4 persegi panjang, pastilah A bukan bujursangkar

Kontraposisi selalu bernilai sama seperti implikasi mula-mula

1.2 Inferensi Logika

Argumen adalah rangkaian kalimat-kalimat. Semua kalimat-kalimat tersebut kecuali yang terakhir disebut **Hipotesa** (atau **Asumsi/Premise**). Kalimat terakhir disebut **Kesimpulan**.

Secara umum, hipotesa dan kesimpulan dapat digambarkan sebagai berikut :

$$\left.\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \cdots \\ p_n \end{array}\right\} \text{hipotesa}$$

$$\therefore\ q \qquad \text{kesimpulan}$$

(tanda $\therefore q$ dibaca " jadi q ")

Suatu Argumen dikatakan **Valid** apabila untuk sembarang pernyataan yang disubstitusikan kedalam hipotesa, jika semua hipotesa tersebut benar, maka kesimpulan juga benar. Sebaliknya, jika meskipun semua hipotesa benar tetapi ada kesimpulan yang salah, maka argumen tersebut dikatakan **Invalid**.

Untuk mencek apakah suatu argumen merupakan kalimat yang valid, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Buat tabel yang menunjukkan nilai kebenaran untuk semua hipotesa dan kesimpulan
2. Carilah baris kritis, yaitu baris dimana semua hipotesa bernilai benar.

3. Dalam baris kritis tersebut, jika semua nilai kesimpulan benar, maka argumen itu valid. Jika diantara baris kritis tersbut ada baris dengan nilai kesimpulan yang salah, maka argumen tersebut adalah invalid.

Contoh 1.11

Argumen

$$\begin{array}{l} p \vee (q \vee r) \\ \neg r \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$

memiliki dari 2 hipotesa, masing-masing $p \vee (q \vee r)$ dan $\neg r$. Kesimpulannya adalah $p \vee q$. Tabel kebenaran hipotesa dan kesimpulan tampak pada tabel 1.7. Baris kritis adalah baris 2, 4 dan 6 (baris yang semua hipotesanya bernilai T, ditandai dengan arsiran). Pada baris-baris tersebut, kesimpulannya juga bernilai T. Maka argumen tersebut Valid

Tabel 1.7

Baris ke	p	q	r	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$\neg r$	$p \vee q$
1	T	T	T	T	T	F	T
2	T	T	F	T	T	T	T
3	T	F	T	T	T	F	T
4	T	F	F	F	T	T	T
5	F	T	T	T	T	F	T
6	F	T	F	T	T	T	T
7	F	F	T	T	T	F	F
8	F	F	F	F	F	T	F

Beberapa inferensi logika tampak pada tabel 1.8

Tabel 1.8

ATURAN	BENTUK ARGUMEN	
Modus Ponen	$p \Rightarrow q$ $\underline{p \quad\quad}$ $\therefore\ q$	
Modus Tollen	$p \Rightarrow q$ $\underline{\neg q \quad\quad}$ $\therefore\ \neg p$	
Penambahan Disjungtif	$\underline{\quad p \quad}$ $\therefore\ p \vee q$	$\underline{\quad q \quad}$ $\therefore\ p \vee q$
Penyederhanaan Konjungtif	$\underline{p \wedge q}$ $\therefore\ p$	$\underline{p \wedge q}$ $\therefore\ q$
Silogisme Disjungtif	$p \vee q$ $\underline{\neg p \quad\quad}$ $\therefore\ q$	$p \vee q$ $\underline{\neg q \quad\quad}$ $\therefore\ p$
Silogisme Hipotesis	$p \Rightarrow q$ $\underline{q \Rightarrow r}$ $\therefore\ p \Rightarrow r$	
Dilema	$p \vee q$ $p \Rightarrow r$ $\underline{q \Rightarrow r}$ $\therefore\ r$	

Konjungsi	$$\begin{array}{l} p \\ \underline{q} \\ \therefore\ p \wedge q \end{array}$$

Contoh 1.12

Dalam pembuatan sebuah program, diketahui informasi berikut ini :

1. Ada variabel yang belum dideklarasikan atau ada kesalahan sintaks
2. Jika ada kesalahan sintaks, maka ada semicolon yang belum ditulis atau ada nama variabel yang salah ketik
3. Tidak ada semicolon yang belum ditulis
4. Tidak ada nama variabel yang salah ketik

Untuk memudahkan mencari dimana sebenarnya letak kesalahannya, informasi terlebih dahulu dinyatakan dalam bentuk variabel.

u : ada variabel yang belum dideklarasikan

v : ada kesalahan sintaks

w : ada semicolon yang belum ditulis

x : ada nama variabel yang salah ketik

Dalam bentuk variabel, informasi tentang program adalah :

1. $u \vee v$
2. $v \Rightarrow w \vee x$
3. $\neg w$
4. $\neg x$

Inferensi yang dapat diturunkan adalah :

5. (3) $\neg w$
   (4) $\neg x$
   ___
   $\therefore\ \neg w \wedge \neg x$ — aturan konjungsi

6. $\neg w \wedge \neg x \Leftrightarrow \neg\ w \vee x$ — hukum de Morgan

7. (6) $\neg\ w \vee x$
   (2) $v \Rightarrow\ w \vee x$
   ___
   $\therefore\ \neg v$ — Modus Tollen

8. (1) $u \vee v$
   (7) $\neg v$
   ___
   $\therefore\ u$ — Silogisme Disjungtif

Jadi kesalahan program terletak pada u : ada variabel yang belum dideklarasikan

1.3 Kalimat Berkuantor

Dalam ilmu logika, kalimat-kalimat yang memerlukan subyek disebut Predikat. Misalkan p adalah predikat : “terbang ke bulan”. Untuk menyatakan perlunya substitusi subyek (yang tidak diketahui), maka dituliskan p(x), yang dibaca : “x terbang ke bulan”. p(x) belum memiliki nilai kebenaran karena benar/salahnya p(x) tergantung dari x.

Salah satu cara untuk merubah Predikat menjadi suatu kalimat (yang memiliki nilai kebenaran) adalah dengan mensubstitusi semua variabelnya dengan nilai-nilai tertentu. Misalkan p(x) : "x habis dibagi 5" dan x disubstitusi dengan 35, maka p(x) menjadi “35 habis dibagi 5” yang merupakan kalimat yang bernilai benar.

Cara lain adalah dengan menambahkan kuantor pada kalimat. Kuantor adalah kata-kata yang menunjukkan berapa banyak elemen yang dibutuhkan agar Predikat menjadi benar.

Ada 2 macam kuantor untuk menyatakan jumlah obyek yang terlibat, yaitu **Kuantor Universal** (simbol $\forall$) dan **Kuantor Eksistensial** (simbol $\exists$)

Kuantor Universal menunjukkan bahwa **setiap/semua** obyek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya. Kuantor Eksistensial berarti **ada/beberapa** obyek dalam semestanya mempunyai sifat kalimat yang menyatakannya

Contoh 1.13

Kalimat berkuantor

- ($\forall$ bilangan riil x) $x^2 \geq 0$ dapat dibaca sebagai :

  Kuadrat dari sembarang bilangan riil tidaklah negatif.

  Semua bilangan riil mempunyai kuadrat tak negatif

  Setiap bilangan riil mempunyai kuadrat tak negatif

  Sembarang blangan riil mempunyai kuadrat tak negatif

  x mempunyai kuadrat tak negatif untuk setiap bilangan riil x

- ($\exists$ bilangan bulat m) $m^2 = m$ dapat dibaca sebagai :

  Terdapatlah bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan bilangan itu sendiri.

  Ada bilangan bulat yang kuadratnya sama dengan bilangan itu sendiri

  Kita dapat menemukan paling sedikit satu bilangan bulat yang sama dengan kuadratnya sendiri.

  $m^2 = m$ untuk suatu bilangan bulat m

  Beberapa bilangan bulat sama dengan kuadratnya sendiri

Contoh 1.14

Untuk menterjemahkan suatu kalimat menggunakan kuantor, terlebih dahulu kita buat variabel yang sesuai.

- Untuk menterjemahkan kalimat “Beberapa orang rajin beribadah”, kita definisikan : p(x) : “x rajin beribadah”. Kalimat yang dimaksud dapat dinyatakan dengan kalimat berkuantor sebagai $(\exists x)\ p(x)$.
- Untuk menterjemahkan kalimat “Semua bayi mempunyai wajah yang berbeda”, kita definisikan : q(y) : “bayi mempunyai wajah yang berbeda-beda”. Kalimat yang dimaksud dapat dinyatakan dengan kalimat berkuantor sebagai $(\forall y)\ q(y)$.
- Untuk menterjemahkan kalimat “Semua orang di bumi dapat mati”, kita definisikan : s(x) : “x dapat mati”. Kalimat yang dimaksud dapat dinyatakan dengan kalimat berkuantor sebagai $(\forall x)\ s(x)$.

$(\forall x)\ p(x)$ bernilai benar bila dan hanya bila p(x) **benar untuk semua x** dalam semesta D. $(\forall x)p(x)$ bernilai salah apabila **ada** $x \in D$ yang menyebabkan p(x) salah. Harga x yang menyebabkan p(x) salah disebut **Contoh Penyangkal (Counter Example).**

Kuantor Eksistensial menunjukkan bahwa diantara obyek-obyek dalam semestanya, **paling sedikit ada satu obyek** (atau lebih) yang memenuhi sifat kalimat yang menyatakannya. Beberapa kata yang digunakan untuk menyebut Kuantor Eksistensial adalah : "Terdapat ... ", "Beberapa x bersifat ...", "Ada ...", “Paling sedikit ada satu x ...".

$(\exists x \in D)\ q(x)$ (kadang kadang disingkat $(\exists x)\ q(x)$) bernilai benar bila dan hanya bila paling sedikit ada satu x dalam D yang menyebabkan q(x) benar, dan bernilai salah jika untuk semua $x \in D$, q(x) bernilai salah.

Contoh 1.15

Misalkan semesta pembicaraannya adalah himpunan bilangan bulat.

a. (∀x) $x^2 - 2 \geq 0$

Jika x = 1 maka $x^2 - 2 = 1^2 - 2 = -1 < 0$. Jadi tidak semua x memenuhi $x^2 - 2 \geq 0$, sehingga kalimat (a) bernilai salah

b. $\exists x \quad x^2 - 10x + 21 = 0$

Persamaan $x^2 - 10x + 21 = (x-3)(x-7) = 0$ akan dipenuhi untuk $x_1 = 3$ dan $x_2 = 7$. Jadi memang benar ada x yang memenuhi relasi $x^2 - 10x + 21 = 0$ (yaitu 3 atau 7), sehingga kalimat bernilai (b) benar.

c. (∀x) $x^2 - 10x + 21 = 0$

Meskipun ada x yang memenuhi $x^2 - 10x + 21 = 0$ (yaitu 3 atau 7 seperti pada soal (b)), tetapi tidak sama semua x bersifat demikian. Jika x = 1, maka $x^2 - 10x + 21 = 1^2 - 10(1) + 21 = 12 \neq 0$. Maka kalimat (c) salah

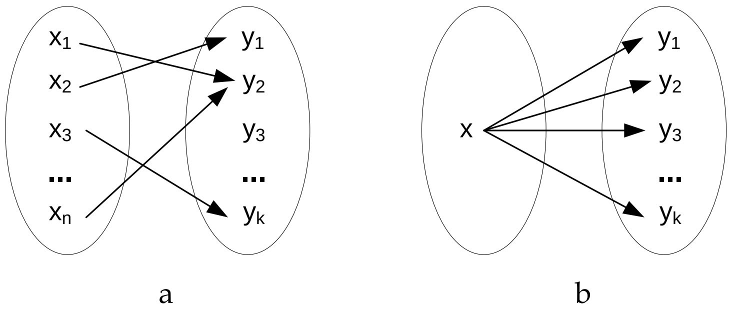
d. $\exists x \quad x^2 - 3 = 0$

Persamaan $x^2 - 3 = 0$ dipenuhi oleh $x_1 = -\sqrt{3}$ dan $x_2 = \sqrt{3}$. Tapi nilai x_1 dan x_2 tersebut bukanlah anggota semesta pembicaraan. Jadi tidak ada x yang memenuhi $x^2 - 3 = 0$, sehingga kalimat bernilai salah

Jika kalimat memuat 2 variabel (x dan y), ada 8 cara berbeda dalam menggunakan 2 kuantor ∀ dan ∃, masing-masing adalah (∀x)(∀y), (∀y)(∀x), (∃x)(∃y), (∃y)(∃x), (∀x)(∃y), (∃y)(∀x), (∀y)(∃x), dan (∃x) (∀y). Jika semua kuantornya sama, maka urutan penulisan kuantor-kuantor itu bisa dibalik. Jadi (∀x)(∀y)P(x,y) = (∀y)(∀x)P(x,y) dan (∃x)(∃y) P(x,y) = (∃y)(∃x) P(x,y)

Akan tetapi jika kuantornya berbeda, urutan penulisannya tidak selalu dapat dibalik. Secara umum, $(\forall x)(\exists y)P(x,y) \neq (\exists x) (\forall y)P(x,y)$

Ilustrasi perbedaan antara $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$ dan $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ tampak pada gambar 1.1. Gambar 1.1a adalah ilustrasi kuantor $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$, sedangkan gambar 1.1b adalah ilustrasi kuantor $(\exists x) (\forall y)P(x,y)$



Gambar 1.1

Pada kuantor $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$, keberadaan y tidaklah tunggal. Untuk x_1 ada y_2 yang menyebabkan P(x,y) benar. Untuk x_2 ada y_1 (yang tidak harus sama dengan y_2), dan seterusnya. Sebaliknya, pada kuantor $(\exists x)(\forall y)$, keberadaan x adalah tunggal. Ada sebuah x yang menyebabkan P(x,y) benar untuk semua y

Untuk membuktikan bahwa pernyataan dengan kuantor $(\exists x)(\exists y)P(x,y)$ (atau $(\exists y)(\exists x)P(x,y)$) **benar**, kita cukup mengambil sebuah x dan sebuah y yang memenuhi P(x,y).

Untuk membuktikan bahwa pernyataan dengan kuantor $(\forall x)(\forall y) P(x,y)$ (atau $(\forall y)(\forall x)P(x,y)$) **salah**, kita cukup mengambil sebuah x dan sebuah y yang tidak memenuhi P(x,y). x dan y yang memenuhi sifat tersebut disebut contoh penyangkal.

Secara umum, hubungan antara penempatan kuantor ganda adalah sebagai berikut:

$$(\forall x)(\forall y)\, p(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (\forall y)(\forall x)\, p(x,y)$$

$$(\exists x)(\exists y)\, p(x,y) \quad \Leftrightarrow \quad (\exists y)(\exists x)\, p(x,y)$$

$$(\exists x)(\forall y)\, p(x,y) \quad \Rightarrow \quad (\forall y)(\exists x)\, p(x,y)$$

Contoh 1.16

Misalkan $p(x,y)$: "y adalah ibu dari x" dan semesta adalah himpunan semua manusia di bumi.

a. $(\forall x)\ (\exists y)\ p(x,y)$ berarti :

   Untuk setiap orang x, terdapatlah seorang y sedemikian hingga y adalah ibu dari x. Dengan kata lain : setiap orang mempunyai ibu. Misalkan ibu dari x_1 adalah y_2. Ibu dari x_2 adalah y_1 (yang bisa sama ataupun berbeda dengan y_2), dan seterusnya. Lihat gambar 1.1a untuk ilustrasinya

b. $(\exists y)\ (\forall x)\ p(x,y)$ berarti

   Terdapatlah seorang y sehingga untuk semua orang x, y adalah ibu dari x. Dengan kata lain : Ada seseorang yang merupakan ibu dari semua orang di dunia ini. Lihat gambar 1.1b untuk ilustrasinya.

Jelas bahwa kedua pernyataan tersebut mempunyai arti yang berbeda. Nilai kebenaran (a) adalah benar, sedangkan (b) salah.

Ingkaran kalimat : "Semua x bersifat p(x)" adalah "Ada x yang tidak bersifat p(x)", dan ingkaran kalimat : "Ada x yang bersifat q(x)" adalah "Semua x tidak bersifat q(x)". Secara formal, ingkaran kalimat berkuantor adalah sebagai berikut :

$$\neg\ ((\forall x \in D)\ p(x)) \equiv (\exists x \in D)\ \neg\ p(x)$$

$$\neg\ ((\exists x \in D)\ q(x)) \equiv (\forall x \in D)\ \neg\ q(x)$$

Untuk mencari ingkaran suatu kalimat, kalimat lebih dulu ditulis ulang dengan menggunakan kuantor, kemudian barulah dituliskan ingkarannya, seperti contoh 1.17

Contoh 1.17

a. Terdapatlah bilangan bulat x sedemikian hingga $x^2 = 9$

Kalimat mula-mula : $(\exists x \in \text{bulat})\ x^2 = 9$

Ingkaran : $(\forall x \in \text{bulat})\ x^2 \neq 9$

Dalam bahasa sehari-hari : "Kuadrat semua bilangan bulat tidak sama dengan 9"

b. Semua dinosaurus telah musnah

Kalimat mula-mula : $(\forall x \in$ Dinosaurus) (x telah musnah)

Ingkaran : $(\exists x \in$ Dinosaurus) (x belum musnah)

Dalam bahasa sehari-hari : "Ada dinosaurus yang belum musnah"

c. Tidak ada ahli matematika yang malas.

Kalimat mula-mula dapat ditulis : "Semua ahli matematika tidak malas" atau $(\forall x \in$ ahli matematika) (x tidak malas)

Ingkaran : $(\exists x \in$ ahli matematika) (x malas)

Dalam bahasa sehari-hari : "Ada ahli matematika yang malas"

d. Semua bilangan bulat adalah bilangan genap.

Bilangan n disebut bilangan genap apabila terdapat bilangan bulat k dengan sifat n=2k, sehingga kalimat mula-mula dapat ditulis : ($\forall$ bilangan bulat n) ($\exists$ bilangan bulat k) n = 2k

Ingkaran : ($\exists$ bilangan bulat n) ($\forall$ bilangan bulat k) $n \neq 2k$

Dalam bahasa sehari-hari : "Ada bilangan bulat yang tidak sama dengan 2 kali bilangan bulat lain", atau "Ada bilangan bulat yang tidak genap"

1.4 Aljabar Boole

Aljabar Boole didefinisikan sebagai suatu himpunan dengan operasi "$\wedge$", "$\vee$", dan "$\neg$" serta elemen 0 dan 1 (ditulis sebagai $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ atau $\langle B, \vee, \wedge, ', 0, 1 \rangle$) yang memenuhi sifat-sifat berikut:

- Hukum Komutatif : $x \vee y = y \vee x \qquad x \wedge y = y \wedge x$
- Hukum Asosiatif : $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$
  $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
- Hukum Distributif : $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
  $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$
- Hukum Identitas : $x \vee 0 = x \qquad x \wedge 1 = x$
- Hukum Negasi : $x \vee x' = 1 \qquad x \wedge x' = 0$

Untuk lebih menyerupai operasi-operasi aritmatika, kadang-kadang simbol "$\vee$" dituliskan sebagai "+" dan "$\wedge$" dituliskan sebagai " . ", atau tidak ditulis sama sekali.

Dalam Aljabar Boole dikenal prinsip dualitas. Jika penghubung $\wedge$ ditukarkan dengan $\vee$ dan 0 ditukarkan dengan 1 di seluruh aturan-aturan dalam aljabar Boole, maka hasilnya juga berlaku sebagai suatu Aljabar Boole.

Contoh 1.18

Contoh paling jelas untuk sebuah Aljabar Boole adalah himpunan simbol-simbol logika (p, q, r, ...) beserta dengan operasi dan ($\wedge$), atau ($\vee$), negasi ($\neg$) serta elemen F (False) dan T (True). Jika elemen 0 disubstitusi dengan F dan 1 disubstitusi dengan T, maka syarat-syarat aljabar Boole dapat dipenuhi karena syarat-syarat tersebut tidak lain adalah hukum ekuivalensi logika.

Misal $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ adalah Aljabar Boole dan $x, y, x', y' \in$ B. Maka hukum-hukum ini berlaku :

- Hukum Idempoten : $x \vee x = x$ $\quad x \wedge x = x$
- Hukum Ikatan : $x \vee 1 = 1$ $\quad x \wedge 0 = 0$
- Hukum Absorbsi : $(x \wedge y) \vee x = x$ $\quad (x \vee y) \wedge x = x$
- Hukum De Morgan : $(x \vee y)' = x' \wedge y'$ $\quad (x \wedge y)' = x' \vee y'$

Misal B = $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1\rangle$ adalah Aljabar Boole. Suatu **fungsi Boole** n variabel adalah fungsi $f : B^n \to B$

Fungsi Boole Sederhana adalah adalah fungsi Boole dengan B = {0,1}. Jadi $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$. Masukannya adalah $\{0,1\}^n$ dan keluaran fungsi adalah {0,1}.

Contoh 1.19

Dengan mengganti T dengan 1 dan F dengan 0 pada tabel 1.1, Operasi Not, And (dan), Or (atau) dalam logika dapat dipandang sebagai fungsi boolean dari $\{0,1\}^2 \to \{0,1\}$

- Fungsi Not : $0,1 \to 0,1$ didefinisikan sebagai

$$\text{Not }(x) = \neg x = \begin{cases} 0 & \text{jika } x{=}1 \\ 1 & \text{jika } x{=}0 \end{cases}$$

- Fungsi And : $0,1^{\,2} \to 0,1$ didefinisikan sebagai :

$$\text{And }(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x = y = 1 \\ 0 & \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ yang lainnya} \end{cases}$$

- Fungsi Or : $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ didefinisikan sebagai :

$$\text{Or}(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = y = 0 \\ 1 & \text{untuk } x \text{ dan } y \text{ yang lain} \end{cases}$$

Contoh 1.20

Penghubung XOR (Exclusive OR, simbol $\oplus$) mirip dengan penghubung "atau" ($\vee$). Akan tetapi jika kedua kalimat penyusunnya benar, maka hasilnya salah. (Bandingkan dengan penghubung "$\vee$" yang sering disebut inklusif OR). Nilai kebenaran penghubung ($\oplus$) dapat dilihat pada tabel 1.9 (dengan mengganti T dengan 1 dan F dengan 0)

Tabel 1.9

p	**q**	**$p \oplus q$**
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$p \oplus q$ berharga 0 jika p = q dan berharga 1 jika $p \neq q$.

XOR merupakan fungsi $\{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$, dan didefinisikan sebagai

$$\text{XOR}(p,q) = \begin{cases} 0 & \text{jika } p=q \\ 1 & \text{jika } p \neq q \end{cases}$$

Ekspresi Boole dalam n buah variabel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ didefinisikan secara rekursif sebagai berikut :

1. 0 dan 1 adalah Ekspresi Boole
2. $x_1, x_2, \ldots, x_n$ masing-masing adalah Ekspresi Boole .

3. Jika E_1 dan E_2 adalah Ekspresi Boole maka $E_1 \wedge E_2$, $E_1 \vee E_2$, E_1' adalah Ekspresi Boole juga.

Dalam praktek, penulisan tanda $\wedge$ kadang-kadang merepotkan dan membingungkan sehingga biasanya Ekspresi Boole ditulis dengan mengganti $\wedge$ dengan tanda titik ($\cdot$) atau dihilangkan sama sekali

Contoh 1.21

a. z sendiri merupakan ekspresi Boole menurut definisi (2)

b. $x \vee y$

Menurut definisi (2), x dan y merupakan ekspresi Boole. Karena x dan y masing-masing merupakan ekspresi Boole, maka menurut (3), $x \vee y$ juga merupakan ekspresi Boole

c. $(x \wedge y)' \vee (z' \wedge x)$

x dan y merupakan ekspresi Boole (definisi 2). Maka $(x \wedge y)$ merupakan ekspresi Boole (definisi 3), sehingga $(x \wedge y)'$ merupakan ekspresi Boole (definisi 3).
Selanjutnya, x dan z merupakan ekspresi Boole (definisi 2), maka z' merupakan ekspresi Boole (definisi 3) sehingga $z' \wedge x$ merupakan ekspresi Boole (definisi 3).

Karena $(x \wedge y)'$ dan $(z' \wedge x)$ masing-masing ekspresi Boole maka $(x \wedge y)' \vee (z' \wedge x)$ merupakan ekspresi Boole juga.

d. $(x \vee y) \wedge (x' \vee z) \wedge 1$

$(x \vee y) \wedge (x' \vee z) \wedge 1$ merupakan ekspresi Boole karena x, y, z dan 1 masing-masing merupakan ekspresi Boole

Ekspresi Boole yang hanya terdiri dari satu varibel (atau komplemennya) disebut **Literal**. Ekspresi Boole n variabel $x_1, \ldots x_n$ yang merupakan gabungan dari beberapa Literal yang dihubungkan dengan "$\wedge$" disebut **Minterm**. Jadi Minterm berbentuk :

$x_1^{a_1}\ x_2^{a_2}\ \ldots\ x_n^{a_n}$ dengan a_i berharga 0 atau 1

x_i^0 adalah x_i dan $x_i^1 = x_i'$

Setiap minterm dalam n variabel $x_1, \ldots, x_n$ hanya mempunyai tepat satu keluaran bernilai 1 dari keseluruhan kombinasi masukan yang mungkin. Akibatnya, setiap ekspresi Boole dalam n variabel tersebut (kecuali 0) dapat dinyatakan sebagai gabungan beberapa minterm yang berbeda. Lebih jauh lagi, gabungan itu tunggal dan tidak tergantung dari urutan penulisan minterm. Gabungan minterm yang ekuivalen dengan suatu ekspresi Boole E dinamakan **Bentuk Normal Disjuntif (DNF = Disjunctive Normal Form)**. Kadang-kadang bentuk tersebut dinamakan **Bentuk Kanonik Minterm** untuk E.

Setiap ekspresi Boole dapat dijadikan bentuk DNF. Ada 2 cara untuk merubah sembarang ekspresi Boole ke dalam DNF. Cara yang pertama adalah dengan membuat tabel masukan/keluaran untuk semua kemungkinan. Dari tabel itu, DNF dapat ditentukan. Cara yang kedua adalah dengan merubah ekspresi Boole secara langsung menggunakan hukum-hukum aljabar Boole.

Contoh 1.22

Ekspresi dalam 3 variabel x, y, z berikut ini :

a. xy'z' merupakan minterm dalam x, y dan z karena memuat literal x, y dan z

b. xz' bukan minterm dalam x, y, dan z karena tidak memuat literal y. Perhatikan bahwa xz' merupakan minterm dalam 2 variabel x dan z

c. xyx'z bukan minterm karena x muncul dalam 2 literal

Contoh 1.23

Untuk mencari ekspresi Boole E dalam 3 variabel x, y, z yang mempunyai tabel kebenaran seperti tabel 1.10, dilakukan langkah-

langkah sebagai berikut :

Tabel 1.10

Baris	**x**	**y**	**z**	**E**
1	1	1	1	0
2	1	1	0	0
3	1	0	1	0
4	1	0	0	0
5	0	1	1	1
6	0	1	0	1
7	0	0	1	0
8	0	0	0	0

Nilai $E = 1$ berasal dari minterm penyusunnya. Suatu minterm bernilai = 1 bila dan hanya bila nilai tiap-tiap literalnya = 1.

Dalam tabel 1.10, nilai $E = 1$ terjadi pada baris ke-5 dan 6. Minterm yang menyebabkan nilai $E = 1$ pada baris ke-5 berasal dari leteral-literal komponennya yang bernilai = 1. Dalam baris tersebut nilai y dan z = 1, akan tetapi x bernilai = 0. Karena $x = 0$ maka $x' = 1$. Ini berarti bahwa pada baris ke-5, minterm yang menyebabkan harga $E = 1$ adalah $x'yz$.

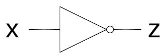
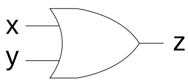
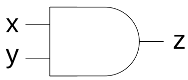
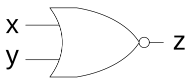
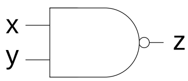
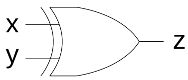
Dengan cara yang sama, Minterm yang menyebabkan nilai $E = 1$ pada baris ke-6 adalah $x'yz'$.

Ekspresi Boole E yang menghasilkan keluaran pada tabel 2.7 adalah gabungan minterm-minterm yang nilainya = 1 yang dihubungkan dengan " $\vee$ " sehingga $E = x'yz \vee x'yz'$.

1.5 Rangkaian Logika

Rangkaian yang rumit dapat disusun dari unti-unit kecil yang disebut **gerbang (gates)**. Suatu gerbang tertentu bersesuaian dengan suatu fungsi Boole sederhana. Beberapa gerbang dasar yang banyak dipakai tampak pada tabel 1.11. Garis yang ada di kiri simbol adalah masukan, dan garis di kanan simbol adalah keluaran. Tabel masukan/keluaran ke-6 gerbang tabel 1.11 tampak pada tabel 1.12

Tabel 1.11

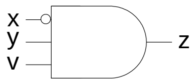
Nama Gerbang	Simbol	Ekuivalensi dalam Aljabar Boole
NOT		$z = x'$
OR		$z = x \vee y$
AND		$z = xy$
NOR		$z = (x \vee y)'$ (Not OR)
NAND		$z = (xy)'$ (Not AND)
XOR		$z = x \oplus y$

Tabel 1.12

		NOT	OR	AND	NOR	NAND	XOR
x	**y**	**x'**	$\mathbf{x \vee y}$	**xy**	$\mathbf{(x \vee y)'}$	**(xy)'**	$\mathbf{x \oplus y}$
1	1	0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	1	1	0

Contoh 1.24

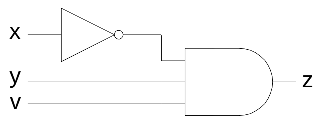
Carilah ekspresi Boole yang sesuai dengan gerbang berikut ini :

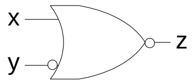


Lingkaran kecil pada garis signal x menunjukkan masukan x'. Dengan masukan x', y dan v, gerbang AND akan memberikan keluaran x'yv.

Jadi z = x'yv.

Gerbang ini tidak lain adalah rangkaian

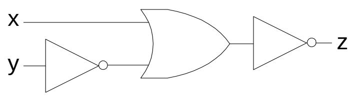




Lingkaran kecil pada garis signal masukan y menunjukkan masukan y'. Dengan masukan x dan y', gerbang OR menghasilkan keluaran $x \vee y'$. Lingkaran kecil di kanan simbol gerbang OR menunjukkan komplemen keluaran gerbang tersebut.

Jadi $z = (x \vee y')' = x'y$

Gerbang ini menyatakan rangkaian :



SOAL DAN PENYELESAIANNYA

Logika Proposisi

Soal 1.1

Manakah diantara kalimat berikut ini yang merupakan proposisi

a. $2 + 2 = 4$

b. Siapakah namamu ?

c. Kevin lebih tinggi dari Dea

d. $64 = 2^6$

e. 1024 adalah bilangan bulat 4 digit terkecil yang merupakan kuadrat suatu bilangan bulat

f. $x = 25$

Penyelesaian :

a. Proposisi dengan nilai benar

b. Bukan proposisi karena merupakan kalimat tanya sehingga tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya

c. Kalimat (c) juga bukan proposisi karena ada banyak orang di dunia ini yang bernama Kevin dan Dea. Kalimat tersebut tidak menunjuk kepada Kevin dan Dea yang spesifik, sehingga tidak diketahui apakah benar bahwa Kevin lebih tinggi dari Dea. Kalimat ini tergantung dari semesta pembicaraan. Kalau semesta pembicaraan adalah mahasiswa-mahasiswa yang mengambil kuliah Matematika Diskrit di suatu Universitas, dan diantara mahasiswa-mahasiswa tersebut hanya ada 1 orang yang bernama Kevin dan 1 orang yang bernama Dea, maka kalimat (c) merupakan suatu proposisi.

d. Proposisi dengan nilai benar

e. Proposisi dengan nilai benar karena $\sqrt{1024} = 32$, sedangkan $31^2 = 961$ adalah bilangan yang terdiri dari 3 digit

f. Bukan proposisi karena tidak jelas benar/salahnya

Soal 1.2

Misal k : Elva orang kaya

s : Elva bersuka cita

Anggaplah ingkaran dari kaya adalah miskin dan ingkaran dari bersuka cita adalah sedih.

Tulislah bentuk simbolis kalimat-kalimat berikut ini :

a. Elva orang yang miskin tapi bersuka cita

b. Elva orang kaya atau ia sedih.

c. Elva tidak kaya ataupun bersuka cita

d. Elva seorang yang miskin atau ia kaya tetapi sedih

Penyelesaian :

a. Kata penghubung "tapi" mempunyai arti yang sama dengan kata penghubung "dan", sehingga bentuk simbolisnya adalah : $\neg k \wedge s$

b. $k \vee \neg s$

c. Kalimat tersebut berarti bahwa Elva tidak kaya dan sekaligus Elva tidak bersuka cita. Bentuk simbolisnya $\neg k \wedge \neg s$

d. $\neg k \vee \ k \wedge \neg s$

Soal 1.3

Diketahui kalimat :

p : “ Kevin sedang bermain di taman “

q : " Kevin ada di dalam rumah "
r : " Kevin sedang mengerjakan PR "
s : " Kevin sedang mendengarkan musik "

a. Nyatakan kalimat : " Jika Kevin tidak bermain di taman, maka pastilah ia sedang mengerjakan PR di dalam rumah sambil mendengarkan musik " dalam bentuk simbolik

b. Nyatakan kalimat : " Kevin sedang mengerjakan PR jika ia mendengarkan musik " dalam bentuk simbolik

c. Kalimat apakah yang dinyatakan dalam bentuk simbolik sebagai $\neg q \vee \neg s$?

Penyelesaian

a. $\neg p \Rightarrow (q \wedge r \wedge s)$

b. Implikasi $p \Rightarrow q$ dapat pula dibaca sebagai "q jika p", sehingga kalimat dapat dinyatakan dalam simbol logika sebagai $s \Rightarrow r$

c. Kevin tidak berada di dalam rumah atau Kevin tidak sedang mendengarkan musik

Soal 1.4

Buatlah tabel kebenaran untuk kalimat dalam bentuk simbol-simbol logika di bawah ini !

a. $\neg \ \neg p \Leftrightarrow q$

b. $\neg p \wedge \ \neg q \wedge r \ \vee \ q \wedge r \ \vee \ p \wedge r$

c. $p \wedge q \ \vee \neg \ p \vee q$

d. $\neg p \wedge \ q \vee \neg r$

e. $\neg p \vee q \Rightarrow \neg q$

Penyelesaian :

Pada masing-masing kasus, tabel kebenaran disusun berdasarkan sub-sub bagian. Jika bentuk simbol logika terdiri dari n variabel, maka tabel kebenaran terdiri dari 2^n baris.

a. Tabel 1.13a adalah tabel kebenaran $\neg \; \neg p \Leftrightarrow q$

Tabel 1.13a

p	**q**	$\neg p$	$\neg p \Leftrightarrow q$	$\neg(\neg p \Leftrightarrow q)$
T	T	F	F	T
T	F	F	T	F
F	T	T	T	F
F	F	T	F	T

b. Tabel kebenaran $\neg p \wedge \; \neg q \wedge r \; \vee \; q \wedge r \; \vee \; p \wedge r$ tampak pada tabel 1.13b

Tabel 1.13b

p	q	r	$\neg p$	$\neg q$	$\neg q \wedge r$	$\neg p \wedge$ $(\neg q \wedge r)$	$q \wedge r$	$p \wedge r$	$\neg p \wedge (\neg q \wedge r)$ $\vee (q \wedge r)$ $\vee \; (p \wedge r)$
T	T	T	F	F	F	F	T	T	T
T	T	F	F	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	T	T	F	F	T	T
T	F	F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	T	F	T
F	T	F	T	F	F	F	F	F	F
F	F	T	T	T	T	T	F	F	T

F	F	F	T	T	F	F	F	F	F

c. Tabel kebenaran $p \wedge q \ \vee \neg \ p \vee q$ tampak pada tabel 1.13c

Tabel 1.13c

p	**q**	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg \ p \vee q$	$p \wedge q \ \vee \neg \ p \vee q$
T	T	T	T	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T

d. Tabel kebenaran $\neg p \wedge \ q \vee \neg r$ tampak pada tabel 1.13d

Tabel 1.13d

p	q	r	$\neg p$	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$\neg p \wedge \ q \vee \neg r$
T	T	T	F	F	T	F
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	F	F	F	F
T	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F	F
F	F	F	T	T	T	T

e. Tabel kebenaran $\neg p \vee q \Rightarrow \neg q$ tampak pada tabel 1.13e

Tabel 1.13e

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$\neg q$	$\neg p \vee q \Rightarrow \neg q$
T	T	F	T	F	F
T	F	F	F	T	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	T	T	T

Soal 1.5

Mana diantara kalimat berikut ini yang bernilai True ?

a. $(x > 0 \text{ dan } x < 1) \Rightarrow x^2 < x$

b. Jika 2+2 = 5 maka 2+4 = 7

c. Jika 2+2 = 4 maka 2+4 = 7

d. 2+2 = 5 atau 2+4 = 7

e. 2+2 = 5 dan 2+4 = 6

Penyelesaian :

a. Menurut teori bilangan, suatu bilangan antara 0 dan 1 akan memiliki kuadrat yang kurang dari bilangan itu sendiri. Sebagai contoh, jika $x = 0{,}3$ maka $x^2 = 0{,}09 < x$. Jadi kalimat bernilai True

b. 2+2=5 maupun 2+4=7 keduanya merupakan pernyataan yang salah. Maka implikasinya bernilai True. Hal ini sesuai dengan tabel 1.1 baris 4

c. 2+2=4 bernilai benar, sedangkan 2+4=7 bernilai salah. Maka implikasi bernilai salah. Hal ini sesuai dengan tabel 1.1 baris 2

d. 2+2=5 dan 2+4=7 keduanya bernilai salah. Karena dihubungkan dengan kata hubung "atau", Maka keseluruhan kalimat bernilai salah. Hal ini sesuai dengan tabel 1.1 baris 4

e. 2+2=5 bernilai salah, dan 2+4=6 bernilai benar. Karena dihubungkan dengan kata hubung "dan", Maka keseluruhan kalimat bernilai salah. Hal ini sesuai dengan tabel 1.1 baris 3

Soal 1.6

p dan q bernilai benar (T) dan r dan s bernilai salah (F), tentukan nilai kebenaran kalimat $\neg(p \wedge q) \vee \neg r \;\vee\; (\neg p \wedge q) \vee \neg r \;\wedge s$

Penyelesaian :

Dengan mensubstitusi nilai-nilai kebenaran ke masing masing variabel p, q, r, dan s didapat :

$$\neg(T \wedge T) \vee \neg F \;\vee\; (\neg T \wedge T) \vee \neg F \;\wedge F$$

$$\Leftrightarrow \quad (\neg T \vee T) \vee \; (F \wedge T) \vee T \;\wedge F$$

$$\Leftrightarrow \quad (F \vee T) \vee \; F \vee T \;\wedge F$$

$$\Leftrightarrow \quad T \vee (T \wedge F)$$

$$\Leftrightarrow \quad T \vee F$$

$$\Leftrightarrow \quad T$$

Soal 1.7

Jika diketahui implikasi $p \Rightarrow q$ bernilai False. Tentukan nilai kebenaran $q \Rightarrow p$

Penyelesaian :

Satu-satunya kemungkinan suatu implikasi $p \Rightarrow q$ bernilai False adalah p = True dan q = False.

Jika q = False dan p = True, maka implikasi $q \Rightarrow p$ bernilai True

Soal 1.8

Jika kalimat p bernilai True, tentukan nilai kebenaran kalimat berikut ini (jika memungkinkan)

a. $p \Rightarrow q$

b. $q \Rightarrow p$

c. $p \vee q$

d. $p \Rightarrow q \quad \Rightarrow p$

e. $p \vee q \quad \Rightarrow q$

Penyelesaian :

Perhatikan kembali tabel 1.1

a. Pada implikasi $p \Rightarrow q$, jika p = True, maka implikasi bisa bernilai True (baris 1) atau False (baris 2). Jadi nilai kebenaran kalimat tidak bisa disimpulkan karena masih tergantung dari nilai kebenaran q

b. Pada implikasi $q \Rightarrow p$, jika p = True (baris 1 dan 3), maka implikasi selalu bernilai True .

c. Satu-satunya kemungkinan kalimat yang dihubungkan dengan penghubung "$\vee$" akan bernilai False apabila kedua kalimat penyusunnya bernilai False. Jika salah satu sudah diketahui bernilai True, maka keseluruhan kalimat pasti akan bernilai True, tidak perduli nilai kebenaran q.

d. Pada implikasi $p \Rightarrow q \quad \Rightarrow p$, jika p = True (baris 1 dan 3), maka implikasi selalu bernilai True, tidak perduli apapun nilai anteseden $p \Rightarrow q$

e. Nilai kebenaran kalimat $p \vee q \quad \Rightarrow q$ merupakan gabungan soal (c) dan (a). Menurut soal (c), jika p bernilai True, maka $p \vee q$ akan bernilai True. Menurut soal (a) Jika $p \vee q$ bernilai True, maka implikasi $p \vee q \;\Rightarrow q$ tidak dapat ditentukan nilai kebenarannya

Soal 1.9

Tentukan ingkaran dari kalimat-kalimat berikut ini :

a. Jika r bilangan rasional, maka angka-angka desimalnya akan berulang

b. Jika n adalah bilangan prima, maka n adalah bilangan ganjil atau n = 2

c. Jika n habis dibagi 6, maka n habis dibagi 2 dan n habis dibagi 3

d. x bilangan genap bila dan hanya bila x habis dibagi 2

e. Jika x > 2 atau x < -2, maka $x^2 > 4$

Penyelesaian :

Ingkaran dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $p \wedge \neg q$

a. r bilangan rasional dan angka-angka desimalnya tidak berulang

b. Misalkan p : n adalah bilangan prima

q : n adalah bilangan ganjil

r : n = 2

Kalimat semula dapat dituliskan dalam simbol logika sebagai $p \Rightarrow \; q \vee r$.

Ingkarannya adalah $p \wedge \neg \; q \vee r$ atau $p \wedge \neg q \wedge \neg r$, yaitu : n adalah bilangan prima tapi n bukan bilangan ganjil dan n ≠ 2

c. Misalkan p : n habis dibagi 6

q : n habis dibagi 2

r : n habis dibagi 3

Kalimat semula dapat dituliskan dalam simbol logika sebagai $p \Rightarrow \; q \wedge r \;$.

Ingkarannya adalah $p \wedge \neg \; q \wedge r \quad \Leftrightarrow \quad p \wedge \; \neg q \vee \neg r \quad \Leftrightarrow$ $p \wedge \neg q \; \vee \; p \wedge \neg r$, yaitu : n habis dibagi 6 tapi n tidak habis dibagi 2 atau n habis dibagi 6 tapi n tidak habis dibagi 3

d. Misalkan p : x bilangan genap

q : x habis dibagi 2

Kalimat semula dapat dituliskan dalam simbol logika sebagai $p \Leftrightarrow q \equiv \; p \Rightarrow q \; \wedge \; q \Rightarrow p$

Ingkarannya adalah :

$$\neg \; p \Leftrightarrow q \; \equiv \neg \; \; p \Rightarrow q \; \wedge \; q \Rightarrow p \; \; \equiv \neg \; p \Rightarrow q \; \vee \neg \; q \Rightarrow p$$

$$\equiv \neg \; \neg p \vee q \; \vee \neg \; \neg q \vee p \; \equiv \; p \wedge \neg q \; \vee \; q \wedge \neg p$$

$$\equiv \; p \wedge \neg q \; \vee \; \neg p \wedge q$$

Maka ingkaran dari kalimat "x bilangan genap bila dan hanya bila x habis dibagi 2" adalah : "x bilangan genap tapi tidak habis dibagi 2 atau x bukan bilangan genap tapi habis dibagi 2"

e. Misalkan p : $x > 2$

q : $x < -2$

r : $x^2 > 4$

Kalimat semula dapat dituliskan dalam simbol logika sebagai $p \vee q \; \Rightarrow r$.

Ingkarannya adalah $p \vee q \; \wedge \neg r$, yaitu "$x > 2$ atau $x < -2$, tapi $x^2 \leq 4$"

Soal 1.10

Sederhanakanlah pernyataan-pernyataan di bawah ini !

a. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

b. $\neg p \wedge (\neg q \wedge r) \ \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$

c. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$

d. $p \wedge \ \neg \ \neg p \vee q \quad \vee \ p \wedge q$

Penyelesaian :

a. $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p \wedge \ q \vee \neg q$ hukum distributif

$\Leftrightarrow p \wedge T$ hukum negasi

$\Leftrightarrow p$ hukum identitas

b. $\neg p \wedge (\neg q \wedge r) \ \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$

$\Leftrightarrow \ \neg p \wedge \neg q \ \wedge r \ \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ hukum asosiatif

$\Leftrightarrow \ \neg p \wedge \neg q \ \vee q \vee p \ \wedge r$ hukum distributif

$\Leftrightarrow \neg \ p \vee q \ \vee q \vee p \ \wedge r$ hukum de Morgan

$\Leftrightarrow \neg \ p \vee q \ \vee \ p \vee q \ \wedge r$ hukum komutatif

$\Leftrightarrow T \wedge r$ hukum negasi

$\Leftrightarrow r$ hukum identitas

c. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$

$\Leftrightarrow \neg p \vee q \ \wedge \ \neg q \wedge p$ transformasi implikasi

$\Leftrightarrow \neg p \vee q \ \wedge \neg \ \neg p \vee q$ hukum de Morgan

$\Leftrightarrow$ F hukum negasi

d. $p \wedge \neg \; \neg p \vee q \quad \vee \; p \wedge q$

$\Leftrightarrow \; p \wedge \; p \wedge \neg q \quad \vee \; p \wedge q$ hukum de Morgan

$\Leftrightarrow \quad p \wedge p \;\; \wedge \neg q \;\vee\; p \wedge q$ hukum asosiatif

$\Leftrightarrow \; p \wedge \neg q \;\vee\; p \wedge q$ hukum Idempoten

$\Leftrightarrow p \wedge \; \neg q \vee q$ hukum distributif

$\Leftrightarrow p \wedge T$ hukum negasi

$\Leftrightarrow p$ hukum identitas

Soal 1.11

Tentukan kontraposisi dari kalimat berikut :

a. Jika ABCD adalah empat persegi panjang, maka ABCD adalah bujur sangkar

b. Aku tidak pergi bila kamu tidak mau ikut

c. Jika ab = 0, maka a = 0 atau b = 0

Penyelesaian

Kontraposisi dari implikasi $p \Rightarrow q$ adalah $\neg q \Rightarrow \neg p$

a. Jika ABCD bukan bujur sangkar, maka ABCD bukan empat persegi panjang.

b. Implikasi Jika p maka q ($\boldsymbol{p \Rightarrow q}$) dapat pula dibaca sebagai “q bila p”. Berarti soal dapat dibaca sebagai : “Jika kamu tidak mau ikut maka aku tidak pergi”.

   Kontraposisinya adalah : “Jika aku pergi, maka kamu mau ikut”

c. Kontraposisi implikasi $p \Rightarrow q \vee r$ adalah $\neg\ q \vee r \Rightarrow \neg p$ atau $\neg q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$

Maka kontraposisinya adalah : Jika a ≠ 0 dan b ≠ 0, maka ab ≠ 0

Soal 1.12

Tentukan konvers, invers dan kontraposisi kalimat berikut ini. Kemudian tentukan nilai kebenarannya.

"Jika x prima, maka x ganjil atau x = 2"

Penyelesaian :

Satu-satunya bilangan prima yang genap adalah 2. Jadi Jika x prima, pastilah x bilangan ganjil atau x = 2. Kalimat mula-mula bernilai benar.

Implikasi $p \Rightarrow q \vee r$ memiliki :

Konvers : $q \vee r \Rightarrow p$

Invers : $\neg p \Rightarrow \neg\ q \vee r \equiv \neg p \Rightarrow \neg q \wedge \neg r$

Kontraposisi $\neg\ q \vee r \Rightarrow \neg p \equiv \neg q \wedge \neg r \Rightarrow \neg p$

Konvers : Jika x ganjil atau x = 2, maka x prima.

Konvers benilai salah. Contoh penyangkalnya adalah 9 yang merupakan bilangan ganjil tapi bukan bilangan prima

Invers : Jika x bukan bilangan prima, maka x bukan bilangan ganjil dan x ≠ 2

Invers bernilai salah. Contoh penyangkalnya adalah 9 yang bukan bilangan prima tapi merupakan bilangan ganjil dan 9 ≠ 2

Kontraposisi : Jika x bukan bilangan ganjil dan x≠2, maka n bukan bilangan prima.

Kontraposisi bernilai benar. Semua bilangan genap ≠ 2 bukanlah bilangan prima.

Kontraposisi tidak selalu bernilai benar. Akan tetapi, kontraposisi selalu memiliki nilai kebenaran yang sama dengan kalimat semula (sama-sama benar atau sama-sama salah).

Tidak ada ketentuan tentang nilai kebenaran Konvers dan Invers. Nilai kebenaran Konvers dan Invers kadang-kadang sama dengan kalimat semula, tapi kadang-kadang juga berbeda.

Soal 1.13

Diketahui kalimat : "Jika n habis dibagi 6 maka n habis dibagi 2 dan 3"

a. Tentukan ingkaran kalimat

b. Tuliskan invers, konvers dan kontraposisinya.

Penyelesaian

Kalimat "Jika n habis dibagi 6 maka n habis dibagi 2 dan 3" berbentuk $p \Rightarrow \; q \wedge r$ dan memiliki :

Ingkaran : $p \wedge \neg \; q \wedge r \;\equiv p \wedge \; \neg q \vee \neg r \;\equiv\; p \wedge \neg q \;\vee\; p \wedge \neg r$

Konvers : $q \wedge r \;\Rightarrow p$

Invers : $\neg p \Rightarrow \neg \; q \wedge r \;\equiv \neg p \Rightarrow \; \neg q \vee \neg r$

Kontraposisi $\neg \; q \wedge r \;\Rightarrow \neg p \equiv \; \neg q \vee \neg r \;\Rightarrow \neg p$

a. Ingkaran kalimat adalah : "n habis dibagi 6 tapi tidak habis dibagi 2, atau n habis dibagi 6 tapi tidak habis dibagi 3"

b. Konvers : Jika n habis dibagi 2 dan 3 maka n habis dibagi 6

   Invers : Jika n tidak habis dibagi 6 maka n tidak habis dibagi 2 atau tidak habis dibagi 3

   Kontraposisi : Jika n tidak habis dibagi 2 atau tidak habis dibagi 3 maka n tidak habis dibagi 6

Soal 1.14

Dengan menggunakan tabel kebenaran, tentukan apakah pasangan kalimat-kalimat di bawah ini ekuivalen

a. $\neg(p \wedge q)$ dengan $\neg p \wedge \neg q$

b. $p \Rightarrow q$ dengan $\neg p \vee q$

Penyelesaian :

a. Tabel 1.14a adalah tabel kebenaran untuk ekspresi $\neg(p \wedge q)$ dan $\neg p \wedge \neg q$

Tabel 1.14a

p	**q**	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	F	T	T	F	F
F	F	F	T	T	T	T

Nilai kebenaran kolom $\neg(p \wedge q)$ tidak selalu sama dengan nilai kebenaran kolom $\neg p \wedge \neg q$. Misalnya pada beris ke-3, nilai kebenaran $\neg(p \wedge q)$ adalah T, sedangkan nilai kebenaran $\neg p \wedge \neg q$ adalah F. Maka $\neg(p \wedge q) \not\Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$

b. Tabel 1.14b adalah tabel kebenaran untuk ekspresi $p \Rightarrow q$ dengan $\neg p \vee q$

Tabel 1.14b

p	**q**	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Karena untuk tiap-tiap baris, nilai kebenaran pada kolom $p \Rightarrow q$ dan $\neg p \vee q$ sama, maka disimpulkan bahwa $p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$

Soal 1.15

Buktikan ekuivalensi berikut ini tanpa menggunakan tabel kebenaran

a. $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

b. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$

Penyelesaian :

a. Karena ruas kanan tampaknya lebih kompleks, maka yang diturunkan adalah ruas kanan.

$\neg p \Rightarrow \neg q \Leftrightarrow \neg(\neg p) \vee \neg q$ (Transformasi dari $\Rightarrow$ ke $\vee$)

$\Leftrightarrow p \vee \neg q$ (Hukum Negasi Ganda)

$\Leftrightarrow \neg q \vee p$ (Hukum Komutatif)

$\Leftrightarrow q \Rightarrow p$ (Transformasi dari $\vee$ ke $\Rightarrow$)

Terbukti bahwa $(\neg p \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ atau $(q \Rightarrow p) \Leftrightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$

b. $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow \neg p \vee (q \Rightarrow r)$ (Transformasi dari $\Rightarrow$ ke $\vee$)

$\Leftrightarrow \neg p \vee (\neg q \vee r)$ (Transformasi dari $\Rightarrow$ ke $\vee$)

$\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee r$ (Hukum Asosiatif)

$\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee r$ (Hukum de Morgan)

$\Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$ (Transformasi dari $\vee$ ke $\Rightarrow$)

Terbukti bahwa $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \Rightarrow r$

Soal 1.16

Tentukan apakah pasangan-pasangan pernyataan berikut ini ekuivalen

a. $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \;\wedge (\neg p \vee \neg q)$ dengan $\neg\,(p \wedge r)$

b. $(p \vee q) \wedge \;\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$ dengan $\neg\, p \wedge q$

c. $\neg\;\; p \vee \neg q \;\vee\; \neg p \wedge \neg q$ dengan $\neg p$

Penyelesaian :

a. $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \;\wedge (\neg p \vee \neg q)$

$\Leftrightarrow \;(\neg p \vee q) \wedge (\neg p \vee \neg q) \;\wedge (p \vee \neg r)$ hukum asosiatif dan komutatif

$\Leftrightarrow \;\neg p \vee (q \wedge \neg q) \;\wedge (p \vee \neg r)$ hukum distributif

$\Leftrightarrow \;\neg p \vee F \;\wedge (p \vee \neg r)$ hukum negasi

$\Leftrightarrow \neg p \wedge (p \vee \neg r)$ hukum identitas

$\Leftrightarrow \;\neg p \wedge p \;\vee\; \neg p \wedge \neg r$ hukum distributif

$\Leftrightarrow F \vee \;\neg p \wedge \neg r$ hukum negasi

$\Leftrightarrow \;\neg p \wedge \neg r$ hukum identitas

$\Leftrightarrow \neg\,(p \vee r)$ hukum de Morgan

Maka $(\neg p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \;\wedge (\neg p \vee \neg q) \;\not\Leftrightarrow\; \neg\,(p \wedge r)$

b. $(p \vee q) \wedge \;\neg p \wedge (\neg p \wedge q)$

$\Leftrightarrow \;p \vee q \;\wedge\; \neg p \wedge \neg p \;\wedge q$ hukum asosiatif

$\Leftrightarrow \;p \vee q \;\wedge\; \neg p \wedge q$ hukum idempoten

$\Leftrightarrow \quad p \vee q \;\; \wedge q \;\; \wedge \neg\, p$ hukum asosiatif

$\Leftrightarrow \; q \wedge \neg\, p$ hukum absorbsi

$\Leftrightarrow \; \neg\, p \wedge q$ hukum komutatif

Jadi $(p \vee q) \wedge \;\; \neg p \wedge (\neg p \wedge q) \quad \Leftrightarrow \neg\, p \wedge q$

c. $\neg \;\; p \vee \neg q \;\; \vee \;\; \neg p \wedge \neg q$

$\Leftrightarrow \quad \neg p \wedge q \;\; \vee \;\; \neg p \wedge \neg q$ hukum de Morgan

$\Leftrightarrow \; \neg p \wedge \;\; q \vee \neg q$ hukum distributif

$\Leftrightarrow \; \neg p \wedge T$ hukum negasi

$\Leftrightarrow \; \neg p$ hukum identitas

Jadi $\neg \;\; p \vee \neg q \;\; \vee \;\; \neg p \wedge \neg q \quad \Leftrightarrow \neg p$

Soal 1.17

Fungsi Exclusive OR (XOR) didefinisikan sebagai $p \oplus q \equiv \;\; p \wedge \neg q \;\; \vee \;\; \neg p \wedge q$. $p \oplus q$ akan bernilai benar jika tepat salah satu diantara p atau q bernilai true

Fungsi Nand (Not And) didefinisikan sebagai $p \uparrow q \; = \; \neg \;\; p \wedge q$.

Carilah ekuivalensi paling sederhana bentuk berikut ini tanpa menggunakan operator XOR maupun NAND

a. $\neg p \oplus q$

b. $p \oplus q \oplus q$

c. $\;\; p \uparrow p \;\; \uparrow \;\; q \uparrow q$

d. $\;\; \neg p \uparrow q \;\; \oplus \neg p$

Penyelesaian :

a. $\neg p \oplus q \;\equiv\; \neg p \wedge \neg q \;\vee\; \neg\; \neg p \;\wedge q$ definisi $\oplus$

$\equiv\; \neg p \wedge \neg q \;\vee\; p \wedge q$

b. $p \oplus q \oplus q \;\equiv p \oplus \;\; q \wedge \neg q \;\vee\; \neg q \wedge q$ definisi $\oplus$

$\equiv p \oplus \; F \vee F$ hukum Negasi

$\equiv p \oplus F$

$\equiv\; p \wedge \neg F \;\vee\; \neg p \wedge F$ definisi $\oplus$

$\equiv\; p \wedge T \;\vee F$ hukum Identitas

$\equiv p \vee F$ hukum Identitas

$\equiv p$ hukum Ikatan

c. $p \uparrow p \;\equiv \neg\; p \wedge p \;\equiv \neg\, p$ definisi $\uparrow$ dan hukum idempoten

$q \uparrow q \;\equiv \neg\; q \wedge q \;\equiv \neg\, q$ definisi $\uparrow$ dan hukum idempoten

Maka $p \uparrow p \;\uparrow\; q \uparrow q \;\equiv \neg\, p \uparrow \neg\, q$

$\equiv \neg\; \neg\, p \wedge \neg\, q$ definisi $\uparrow$

$\equiv p \vee q$ hukum de Morgan

d. $\neg\, p \uparrow q \;\equiv \neg\; \neg\, p \wedge q \;\equiv p \vee \neg q$ definisi $\uparrow$ dan de Morgan

Maka $\neg\, p \uparrow q \;\oplus \neg\, p$

$\equiv\; p \vee \neg q \;\oplus \neg p$

$\equiv\;\; p \vee \neg q \;\wedge \neg\; \neg p \;\;\vee\; \neg\; p \vee \neg q \;\wedge \neg p$ definisi $\oplus$

$\equiv \quad p \vee \neg q \;\; \wedge p \;\; \vee \;\; \neg p \wedge q \wedge \neg p$ hukum de Morgan

$\equiv p \vee \;\; \neg p \wedge q$ hukum Absorbsi dan idempoten

$\equiv \;\; p \vee \neg p \;\; \wedge \;\; p \vee q$ hukum distributif

$\equiv T \wedge \;\; p \vee q$ hukum Negasi

$\equiv \;\; p \vee q$ hukum Identitas

Soal 1.18

Dengan menggunakan tabel kebenaran, tentukan apakah kalimat-kalimat di bawah ini adalah Tautologi, Kontradiksi, atau bukan keduanya

a. $q \Rightarrow (p \vee q)$

b. $\neg p \wedge q \;\; \wedge \;\; q \wedge r \quad \wedge \neg q$

c. $(p \vee q) \wedge \neg \;\; \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) \quad \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$

Penyelesaian :

a. Tabel kebenaran implikasi $q \Rightarrow (p \vee q)$ tampak pada tabel 1.15a

Tabel 1.15a

p	q	$p \vee q$	$q \Rightarrow (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

Karena semua baris pada kolom $q \Rightarrow (p \vee q)$ bernilai T, maka $q \Rightarrow (p \vee q)$ merupakan Tautologi.

b. Tabel kebenaran implikasi $\neg p \wedge q \ \wedge \ q \wedge r \quad \wedge \neg q$ tampak pada tabel 1.15b

Tabel 1.15b

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \wedge q$	$q \wedge r$	$\neg q$	$\neg p \wedge q \ \wedge \ q \wedge r \ \wedge \neg q$
T	T	T	F	F	T	F	F
T	T	F	F	F	F	F	F
T	F	T	F	F	F	T	F
T	F	F	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F	F	F
F	F	T	T	F	F	T	F
F	F	F	T	F	F	T	F

Karena semua baris pada kolom $\neg p \wedge q \ \wedge \ q \wedge r \quad \wedge \neg q$ bernilai F, maka $\neg p \wedge q \ \wedge \ q \wedge r \quad \wedge \neg q$ merupakan Kontradiksi.

c. Misal A = $p \vee q$; B = $\neg q \vee \neg r$; C = $\neg p \wedge B$; D = $A \wedge \neg C$

E = $\neg p \wedge \neg q$; F = $\neg p \wedge \neg r$; G = $D \vee E \vee F$

Tabel kebenaran implikasi

E = $(p \vee q) \wedge \neg \quad \neg p \wedge (\neg q \vee \neg r) \quad \vee (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg r)$

tampak pada tabel 1.15c

Tabel 1.15c

p	**q**	**r**	$\neg p$	$\neg q$	$\neg r$	**A**	**B**	**C**	$\neg C$	**D**	**E**	**F**	**G**
T	T	T	F	F	F	T	F	F	T	T	F	F	T

T	T	F	F	F	T	T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	T	F	T	F	T	T	F	T	T	F	F	T
T	F	F	F	T	T	T	T	F	T	T	F	F	T
F	T	T	T	F	F	T	F	F	T	T	F	F	T
F	T	F	T	F	T	T	T	T	F	F	F	T	T
F	F	T	T	T	F	F	T	T	F	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T	F	T	T	F	F	T	T	T

Karena semua baris pada kolom G bernilai T, maka

$$(p\vee q)\wedge\neg\quad\neg p\wedge(\neg q\vee\neg r)\quad\vee(\neg p\wedge\neg q)\vee(\neg p\wedge\neg r)$$

merupakan Tautologi.

Soal 1.19

Diketahui kalimat A : $\{(p\Rightarrow q)\wedge(r\Rightarrow s)\wedge(p\vee r)\}\Rightarrow(q\vee s)$.

a. Jika p, q = T (True), dan r, s = F (False), tentukan nilai kebenaran kalimat A

b. Sederhanakanlah bentuk kalimat A

c. Tentukan apakah A merupakan Tautologi, Kontingensi atau bukan keduanya !

Penyelesaian :

a. $T\Rightarrow T \ \wedge\ F\Rightarrow F \ \wedge\ T\vee F \quad\Rightarrow\ T\vee F$

$\equiv\ T\wedge T\wedge T\ \Rightarrow T$

$\equiv\ T\wedge T\ \Rightarrow T$

$\equiv T\Rightarrow T$

$\equiv T$

Jadi kalimat A bernilai True

b. $p \Rightarrow q \;\wedge\; r \Rightarrow s \;\wedge\; p \vee r \quad \Rightarrow \; q \vee s$

$\equiv \;\; \neg p \vee q \;\wedge\; \neg r \vee s \;\wedge\; p \vee r \quad \Rightarrow \; q \vee s$ transformasi $\Rightarrow$

$\equiv \neg \;\; \neg p \vee q \;\wedge\; \neg r \vee s \;\wedge\; p \vee r \quad \vee \; q \vee s$ transformasi $\Rightarrow$

$\equiv \neg \; \neg p \vee q \;\vee \neg \; \neg r \vee s \;\vee \neg \; p \vee r \;\vee\; q \vee s$ de Morgan

$\equiv \;\; p \wedge \neg q \;\vee\; r \wedge \neg s \;\vee\; \neg p \wedge \neg r \;\vee q \vee s$ de Morgan

$\equiv \;\; q \vee \; p \wedge \neg q \;\;\vee\; s \vee \; r \wedge \neg s \;\;\vee\; \neg p \wedge \neg r$ komutatif

$\equiv \;\; q \vee p \;\wedge\; q \vee \neg q \;\;\vee\;\; s \vee r \;\wedge\; s \vee \neg s \;\;\vee\; \neg p \wedge \neg r$

$\equiv \;\; q \vee p \;\wedge T \;\vee\;\; s \vee r \;\wedge T \;\vee\; \neg p \wedge \neg r$ hukum Negasi

$\equiv \;\; q \vee p \;\vee\; s \vee r \;\vee\; \neg p \wedge \neg r$ hukum Identitas

$\equiv \;\; q \vee s \;\vee\; p \vee r \;\vee\; \neg p \wedge \neg r$ sifat komutatif

$\equiv \;\; q \vee s \;\vee\;\; p \vee r \;\vee \neg \; p \vee r$ hukum de Morgan

$\equiv \;\; q \vee s \;\vee T$ hukum Negasi

$\equiv T$ hukum Ikatan

c. Karena hasil penyederhanaan adalah True, maka A merupakan Tautologi

Soal 1.20

Tanpa menggunakan tabel kebenaran, tentukan apakah bentuk berikut ini merupakan tautologi, kontradiksi, atau bukan keduanya

a. $(p \vee \neg q) \Rightarrow q$

b. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

c. $(\neg p \vee q) \vee (p \wedge \neg q)$

Penyelesaian :

a. $(p \vee \neg q) \Rightarrow q \equiv \neg(p \vee \neg q) \vee q$ — transformasi $\Rightarrow$

$\equiv (\neg p \wedge q) \vee q$ — hukum de Morgan

$\equiv q$ — hukum Absorbsi

Pernyataan bukan Tautologi dan bukan Kontradiksi

b. $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$

$\equiv \neg[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \vee [(p \Rightarrow q) \Rightarrow (p \Rightarrow r)]$ — transformasi $\Rightarrow$

$\equiv \neg[\neg p \vee (q \Rightarrow r)] \vee [\neg(p \Rightarrow q) \vee (p \Rightarrow r)]$ — transformasi $\Rightarrow$

$\equiv \neg[\neg p \vee (\neg q \vee r)] \vee [\neg(\neg p \vee q) \vee (\neg p \vee r)]$ — transformasi $\Rightarrow$

$\equiv [p \wedge \neg(\neg q \vee r)] \vee [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)]$ — de Morgan

$\equiv [p \wedge (q \wedge \neg r)] \vee [(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)]$ — de Morgan

$\equiv [(p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q)] \vee (\neg p \vee r)$ — sifat asosiatif

$\equiv [p \wedge ((q \wedge \neg r) \vee \neg q)] \vee (\neg p \vee r)$ — sifat distributif

$\equiv [p \wedge ((q \vee \neg q) \wedge (\neg r \vee \neg q))] \vee (\neg p \vee r)$ — sifat distributif

$\equiv [p \wedge T \wedge (\neg r \vee \neg q)] \vee (\neg p \vee r)$ — hukum Negasi

$\equiv [p \wedge (\neg r \vee \neg q)] \vee (\neg p \vee r)$ — hukum Identitas

$\equiv (p \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \vee r)$ — sifat distributif

$\equiv \quad p \wedge \neg r \ \vee \neg \ p \wedge \neg r \quad \vee \ p \wedge \neg q$ komutatif & de Morgan

$\equiv T \vee \ p \wedge \neg q$ hukum Negasi

$\equiv T$ hukum Ikatan

Karena hasil akhir adalah True, maka pernyataan adalah Tautologi

c. $\neg p \vee q \ \vee \ p \wedge \neg q \ \equiv \ \neg p \vee q \ \vee \neg \ \neg p \vee q$ de Morgan

$\equiv T$ hukum Negasi

Karena hasil akhir adalah True, maka pernyataan adalah Tautologi

Inferensi Logika

Soal 1.21

Tentukan apakah inferensi berikut ini valid. Jika inferensinya valid, jelaskan aturan inferensi yang digunakan. Jika tidak valid, jelaskan kesalahan yang terjadi.

a. Jika Adi menjawab soal dengan benar, maka ia akan memperoleh jawaban = 2

   Adi memperoleh jawaban = 2

   $\therefore$ Adi menjawab soal dengan benar

b. Bilangan riil ini merupakan bilangan rasional atau irrasional

   Bilangan riil ini tidak rasional

   $\therefore$ Bilangan riil ini adalah bilangan irrasional

c. Jika saya pergi nonton, maka saya tidak bisa menyelesaikan PR

   Jika saya tidak bisa menyelesaikan PR, maka saya tidak lulus

   $\therefore$ Jika saya pergi nonton, maka saya tidak lulus

Penyelesaian :

a. Jika dinyatakan dengan simbol logika, inferensi tersebut dapat ditulis sebagai :

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \qquad\quad} \\ \therefore \; p \end{array}$$

Inferensi tersebut tidak valid. Inferensi ini bukan Modus Ponen maupun Modus Tollens (lihat tabel 1.8)

b. Jika dinyatakan dengan simbol logika, inferensi tersebut dapat ditulis sebagai :

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\neg p \qquad\quad} \\ \therefore \; q \end{array}$$

Inferensi tersebut valid menggunakan metode Silogisme Disjungtif.

c. Jika dinyatakan dengan simbol logika, inferensi tersebut dapat ditulis sebagai :

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow r \quad} \\ \therefore \; p \Rightarrow r \end{array}$$

Inferensi tersebut valid menggunakan metode Silogisme Hipotesis.

Soal 1.22

Dengan menggunakan tabel kebenaran, tentukan apakah Argumen di bawah ini Valid/Invalid.

a. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{q \Rightarrow p \quad} \\ \therefore \; p \vee q \end{array}$$

b. $p \Rightarrow (q \vee \neg r)$

$\underline{q \Rightarrow (p \wedge r)}$

$\therefore\ p \Rightarrow r$

c. $p \vee q$

$p \Rightarrow \neg q$

$\underline{p \Rightarrow r}$

$\therefore\ r$

Penyelesaian :

a. Hipotesanya adalah $p \Rightarrow q$ dan $q \Rightarrow p$. Konklusinya adalah $p \vee q$

Tabel kebenaran tampak pada tabel 1.16 a

Tabel 1.16a

Baris ke	p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \vee q$
1	T	T	T	T	T
2	T	F	F	T	T
3	F	T	T	F	T
4	F	F	T	T	F

Baris kritis adalah baris ke-1 dan 4 (baris yang diarsir). Pada baris ke-4 (baris kritis) nilai konklusinya adalah F. Maka argumen tersebut Invalid.

b. Hipotesanya adalah $p \Rightarrow (q \vee \neg r)$ dan $q \Rightarrow (p \wedge r)$. Konklusinya adalah $p \Rightarrow r$

Tabel kebenaran tampak pada tabel 1.16b

Tabel 1.16b

Baris ke	p	q	r	$\neg r$	$q \vee \neg r$	$p \wedge r$	$p \Rightarrow (q \vee \neg r)$	$q \Rightarrow (p \wedge r)$	$p \Rightarrow r$
1	T	T	T	F	T	T	T	T	T
2	T	T	F	T	T	F	T	F	F
3	T	F	T	F	F	T	F	T	T
4	T	F	F	T	T	F	T	T	F
5	F	T	T	F	T	F	T	F	T
6	F	T	F	T	T	F	T	F	T
7	F	F	T	F	F	F	T	T	T
8	F	F	F	T	T	F	T	T	T

Baris kritis adalah baris ke-1, 4, 7, dan 8 (baris yang diarsir). Pada baris ke-4 (baris kritis) nilai konklusinya adalah F. Maka argumen tersebut Invalid.

c. Hipotesanya adalah $p \vee q$, $p \Rightarrow \neg q$ dan $p \Rightarrow r$ Konklusinya adalah r

Tabel kebenaran tampak pada tabel 1.16c

Tabel 1.16c

Baris ke	p	q	r	$\neg q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow \neg q$	$p \Rightarrow r$	r
1	T	T	T	F	T	F	T	T
2	T	T	F	F	T	F	F	F
3	T	F	T	T	T	T	T	T
4	T	F	F	T	T	T	F	F

5	F	T	T	F	T	T	T	T
6	F	T	F	F	T	T	T	F
7	F	F	T	T	F	T	T	T
8	F	F	F	T	F	T	T	F

Baris kritis adalah baris ke-3, 5 dan 6 (baris yang diarsir). Pada baris ke-6 (baris kritis) nilai konklusinya adalah F. Maka argumen tersebut Invalid.

Soal 1.23

Buktikan kevalidan Argumen di bawah ini dengan menggunakan prinsip-prinsip inferensi logika

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \underline{(p \vee q) \Rightarrow r} \\ \therefore\ r \end{array}$$

Penyelesaian :

Hipotesa argumen adalah :

(1) $p \wedge q$

(2) $p \vee q \ \Rightarrow r$

Kevalidan argumen dilakukan sebagai berikut :

- $\begin{array}{ll} \underline{(1)\ \ p \wedge q} & \\ (3)\ \ \therefore\ p & \text{penyederhanaan konjungtif} \end{array}$

- $\begin{array}{ll} (3)\ \ \underline{p\qquad} & \\ (4)\ \ \therefore\ p \vee q & \text{penambahan disjungtif} \end{array}$

(2) $(p \vee q) \Rightarrow r$

• (4) $(p \vee q)$

---

(5) $\therefore\ r$ Modus Ponen

Terbukti bahwa Argumen

$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ (p \vee q) \Rightarrow r \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

merupakan argumen yang valid.

Soal 1.24

Tanpa menggunakan tabel kebenaran, tentukan apakah inferensi berikut ini valid.

a. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \neg\, p \\ \hline \therefore\ \neg\, q \end{array}$$

b. $$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$

c. $$\begin{array}{l} \neg\, r \\ p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore\ \neg\, p \end{array}$$

d. $$\begin{array}{l} p \Rightarrow \quad r \Rightarrow s \\ \neg r \quad \Rightarrow \quad \neg p \\ p \\ \hline \therefore\ s \end{array}$$

e.
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

f.
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg\ p \\ \hline \therefore\ \neg\ q \end{array}$$

Penyelesaian :

a. Tidak valid. Inferensi ini bukan modus ponen maupun modus tollens

b.
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$
penyederhanaan Konjungtif

$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore\ p \vee q \end{array}$$
penambahan Disjungtif

Jadi inferensi valid

c. Hipotesa argumen adalah :

(1) $\neg r$

(2) $p \Rightarrow q$

(3) $q \Rightarrow r$

Inferensi valid. Kevalidan inferensi ditentukan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut :

(3) $q \Rightarrow r$

• (1) $\neg r$

(4) $\therefore\ \neg q$ Modus Tollen

(2) $\quad p \Rightarrow q$

- (4) $\quad \neg q$

(4) $\quad \therefore\ \neg p$ Modus Tollen

d. Hipotesa argumen adalah :

(1) $\quad p \Rightarrow\ r \Rightarrow s$

(2) $\quad \neg r \Rightarrow \neg p$

(3) $\quad p$

Inferensi valid. Kevalidan inferensi ditentukan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut :

(2) $\quad \neg r \Rightarrow \neg p$

- (3) $\quad p$

(4) $\quad \therefore\ r$ Modus Tollen

(1) $\quad p \Rightarrow\ r \Rightarrow s$

- (3) $\quad p$

(5) $\quad \therefore\ r \Rightarrow s$ Modus Ponen

(5) $\quad r \Rightarrow s$

- (4) $\quad r$

(6) $\quad \therefore\ s$ Modus Ponen

e. Inferensi valid berdasarkan Silogisme Disjungtif

f. Inferensi tidak valid

Soal 1.25

Carilah kesimpulan berdasarkan hipotesis berikut ini :

$\neg t \Rightarrow \neg r$

$\neg s$

$t \Rightarrow w$
$r \vee s$

Penyelesaian :

Hipotesa argumen adalah :

(1) $\neg t \Rightarrow \neg r$

(2) $\neg s$

(3) $t \Rightarrow w$

(4) $r \vee s$

Kesimpulan dilakukan menggunakan langkah-langkah sebagai berikut :

- (4) $r \vee s$
  (2) $\neg s$
  ____
  (5) $\therefore\ r$ Silogisme Disjungtif

- (1) $\neg t \Rightarrow \neg r$
  (2) r
  ____
  (6) $\therefore\ t$ Modus Tollen

- (3) $t \Rightarrow w$
  (6) t
  ____
  (7) $\therefore\ w$ Modus Ponen

Jadi kesimpulan akhir dari hipotesis adalah w

Soal 1.26

Gunakan prinsip inferensi untuk menurunkan $\neg s$ dari hipotesa-hipotesa :

$(s \vee q) \Rightarrow p$

$\neg a$

$p \Rightarrow a$

Penyelesaian :

Hipotesa argumen adalah :

(1) $s \vee q \Rightarrow p$

(2) $\neg a$

(3) $p \Rightarrow a$

Inferensi yang dilakukan adalah sebagai berikut :

- (3) $p \Rightarrow a$
  (2) $\neg a$
  ____
  (4) $\therefore \neg p$ Modus Tollen

- (1) $s \vee q \Rightarrow p$
  (4) $\neg p$
  ____
  (5) $\therefore \neg\ s \vee q$ Modus Tollen
  $\equiv \neg s \wedge \neg q$ hukum de Morgan

- (5) $\neg s \wedge \neg q$
  ____
  (6) $\therefore \neg s$ Penyederhanaan Konjungtif

Dari hipotesa yang diketahui, terbukti dapat diperoleh $\neg s$

Soal 1.27

Buatlah kesimpulan berdasarkan fakta-fakta berikut ini :

a. Jika x habis dibagi 8, maka x habis dibagi 4

Jika x habis dibagi 4, maka x habis dibagi 2 x habis dibagi 4

b. Jika x bilangan ganjil, maka (x+1) bilangan genap

4 adalah bilangan genap

c. Jika hari ini adalah hari Jumat, maka besok adalah hari Sabtu

Hari ini adalah hari Sabtu

Penyelesaian :

a. Jika x habis dibagi 4, maka x habis dibagi 2

x habis dibagi 4
___

x habis dibagi 2 (Modus Ponen)

Perhatikan bahwa untuk mengambil sebuah kesimpulan, tidak diharuskan menggunakan semua hipotesa. Dalam kasus ini, hanya hipotesa 2 dan 3 saja yang digunakan. Hipotesa 1 tidak digunakan.

b. Tidak dapat disimpulkan apapun.

Jika menggunakan modus ponen, seharusnya hipotesa kedua : "4 adalah bilangan ganjil". Kesimpulannya adalah "(4+1)=5 adalah bilangan genap".

Jika akan menggunakan Modus Tollen, seharusnya hipotesa kedua : "4 bukanlah bilangan genap". Kesimpulannya adalah "3 bukan bilangan ganjil".

c. Tidak ada kesimpulan yang dapat diambil karena hipotesa 1 dan 2 tidak dapat dihubungkan.

Jika menggunakan Modus Ponen, hipotesa 2 seharusnya : "Hari ini adalah hari Jumat", dan kesimpulan yang dapat diambil adalah : "Besok adalah hari Sabtu"

Jika menggunakan Modus Tollen, hipotesa 2 seharusnya : "Besok bukan hari Sabtu", dan kesimpulan yang dapat diambil adalah : "Hari ini bukan hari Jumat"

Soal 1.28

Carilah kesimpulan berdasarkan fakta-fakta berikut ini :

- Jika saya lulus dari fakultas Hukum, maka saya akan kaya.
- Jika saya lulus dari jurusan Arkeologi, maka saya akan sering ke luar negeri
- Jika saya kaya atau sering ke luar negeri, maka saya tidak akan menyesal
- Sekarang saya menyesal

Penyelesaian :

Misalkan :

p : saya lulus dari fakultas Hukum

q : saya kaya

r : saya lulus dari jurusan Arkeologi

s : saya sering ke luar negeri

t : saya menyesal

Fakta-fakta tersebut dapat dinyatakan dengan simbol logika sebagai

(1) $p \Rightarrow q$

(2) $r \Rightarrow s$

(3) $q \vee s \Rightarrow \neg t$

(4) t

Langkah inferensi yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut :

(3) $q \vee s \Rightarrow \neg t$

(4) t

---

(5) $\therefore \neg \ q \vee s$ Modus Tollen

$\equiv \neg q \wedge \neg s$ hukum de Morgan

- (5) $\neg q \wedge \neg s$
  (6) $\therefore\ \neg q$ Penyederhanaan Konjungtif
- (1) $p \Rightarrow q$
  (6) $\neg q$
  (7) $\therefore\ \neg p$ Modus Tollen
- (5) $\neg q \wedge \neg s$
  (8) $\therefore\ \neg s$ Penyederhanaan Konjungtif
- (2) $r \Rightarrow s$
  (8) $\neg s$
  (9) $\therefore\ \neg r$ Modus Tollen
- (7) $\neg p$
  (9) $\neg r$
  (9) $\therefore\ \neg p \wedge \neg r$ Konjungsi

Jadi kesimpulan akhir yang bisa diperoleh adalah, $\neg p \wedge \neg r$, atau : saya tidak lulus dari fakultas Hukum dan juga tidak lulus dari jurusan Arkeologi

Soal 1.29

Ada sebuah pesan wasiat yang ditemukan di sebuah rumah tua. Pesan tersebut menggambarkan letak harta karun di sekitar rumah tersebut. Dalam pesannya terkandung 5 statemen yang berhubungan dengan letak harta karun tersebut sbb :

- Jika rumah tua itu terletak di tepi danau, maka harta karun tidak terletak di dapur rumah
- Jika pohon di halaman depan adalah pohon kelapa, maka harta karun disembunyikan di dapur.

- Rumah tua tersebut terletak di tepi danau
- Pohon di depan rumah tua adalah pohon kelapa, atau harta karun disembunyikan di bawah pagar.
- Jika pohon di belakang rumah adalah pohon mangga, maka harta karun disembunyikan di garasi

Gunakan prinsip-prinsip inferensi untuk menentukan dimanakah sebenarnya harta karun tersebut disimpan ?

Penyelesaian :

Misalkan :

p : rumah tua terletak di tepi danau

q : harta karun di dapur

r : pohon di halaman depan adalah pohon kelapa

s : harta karun di bawah pagar

t : pohon di belakang rumah adalah pohon mangga

u : harta karun di garasi

Fakta-fakta tersebut dapat dinyatakan dengan simbol logika sebagai

(1) $p \Rightarrow \neg q$

(2) $r \Rightarrow q$

(3) p

(4) $r \vee s$

(5) $t \Rightarrow u$

Langkah inferensi yang dapat dilakukan adalah sebagai berikut :

(1) $p \Rightarrow \neg q$

- (3) p

---

(6) $\therefore\ \neg q$ Modus Ponen

$$\begin{array}{lll} & (2) & r \Rightarrow q \\ \bullet & (6) & \neg q \\ \hline & (7) & \therefore\ \neg r \qquad \text{Modus Tollen} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} & (4) & r \vee s \\ \bullet & (7) & \neg r \\ \hline & (8) & \therefore\ s \qquad \text{Silogisme Disjungtif} \end{array}$$

Jadi harta karun disembunyikan di bawah pagar.

Perhatikan bahwa hipotesis no 5 tidak digunakan dalam inferensi ini.

Soal 1.30

Dalam sebuah pulau terpencil hanya hidup 2 jenis manusia. Jenis pertama adalah kaum Ksatria yang selalu mengatakan kebenaran, dan jenis kedua adalah kaum Penjahat yang selalu mengatakan kebohongan. Suatu hari, anda mengunjungi pulau tersebut dan bertemu dengan 2 orang penduduk pulau tersebut (X dan Y) yang tidak anda ketahui jenisnya

X berkata : "Kami berdua Penjahat"
Y tidak berbicara apapun

Golongan apakah X dan Y ?

Penyelesaian

Untuk menyelesaikannya, kita buat suatu pengandaian. Misalkan X adalah penjahat. Berdasarkan sifat penjahat dan apa yang dikatakannya, kita membuat inferensi. Jika tidak terjadi kontradiksi pada inferensi, berarti pengandaian kita benar. Akan tetapi jika inferensi tersebut mengarah pada suatu kontradiksi, berarti pengandaian kita salah.

Misalkan X adalah Ksatria. Menurut sifatnya, berarti apa yang dikatakan X (ksatria) adalah benar. X berkata : "Kami berdua

Penjahat". Terjadilah kontradiksi. Pada pengandaian, X adalaha ksatria. Dari apa yang diucapkan, X adalah Penjahat.

Karena terjadi kontradiksi, berarti X adalah Penjahat. Berarti apa yang dikatakan X (yaitu "Kami berdua Penjahat") bohong. Jadi yang benar adalah ingkarannya :

- "Kami berdua adalah ksatria". Jika demikian, berarti terjadi kontradiksi karena X adalah Penjahat.
- " Salah satu dari kami bukan penjahat". Karena X adalah penjahat, berarti Y adalah Ksatria

Kesimpulannya, X adalah penjahat dan Y adalah Ksatria.

Soal 1.31

Sebuah jalan membentang dari selatan ke utara memisahkan 2 buah desa yang letaknya di sisi barat dan timur jalan, yaitu desa "jahat" dan desa "baik". Semua penduduk desa jahat selalu mengatakan kebohongan, dan semua penduduk desa "baik" selalu mengatakan kejujuran.

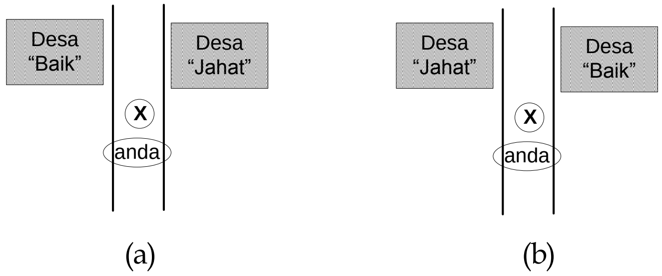
Anda seorang pendatang dan mencari lokasi desa "baik". Masalahnya, anda tidak tahu apakah desa "baik" terletak di barat atau timur jalan. Suatu hari anda sedang berjalan di jalan tersebut dari selatan ke utara dan bertemu dengan seseorang bernama X yang tidak anda ketahui dari kelompok mana.

Manakah diantara jawaban atas pertanyaan berikut ini yang dapat menjelaskan letak desa "baik"

- Siapakah namamu ?
- Dimana letak desa "baik" ?
- Apakah desa di sebelah timur adalah desa baik ?
- Apakah anda berasal dari desa di sebelah barat ?
- Apakah anda berasal dari desa baik ?

Penyelesaian :

Ada 2 kemungkinan letak desa "baik" dan jahat", seperti tampak pada gambar 1.2(a) dan 1.2(b).



Gambar 1.2

Jawaban atas pertanyaan : "Siapa namamu ?" jelas tidak akan menunjukkan dimana letak desa "Baik" karena nama seseorang tidak ada hubungannya dengan letak desa.

Misalkan keadaanya seperti gambar 1.2(a), Jika pertanyaannya adalah "dimana letak desa "baik" ?" dan X berasal dari desa "baik" (berarti ia selalu mengatakan kejujuran), maka ia akan menjawab "di Barat jalan". Tapi jika X berasal dari desa "jahat" (berarti ia selalu bohong), maka ia akan menjawab "di Timur jalan". Apabila keadaannya seperti gambar 1.2(b), maka jawabannya akan terbalik. Jadi baik keadaannya seperti gambar 1.2(a) maupun 1.2(b), pertanyaan ini tidak dapat dipakai untuk menentukan lokasi desa "baik" karena anda tidak tahu si X berasal dari desa mana.

Rangkuman pertanyaan dan implikasi tampak pada tabel 1.17

Tabel 1.17

Pertanyaan	Posisi : gambar 1.1(a) dan A berasal dari desa		Posisi : gambar 1.1(b) dan A berasal dari desa		Kesimpulan
	"Baik"	"Jahat"	"Baik"	"Jahat"	
• Siapakah	X	Bukan	X	Bukan	Tidak ada

namamu ?		X		X	kesimpulan
• Dimana letak desa "baik" ?	Barat	Timur	Timur	Barat	Tidak ada kesimpulan
• Apakah desa di sebelah timur adalah desa baik ?	Bukan	Ya	Ya	Bukan	Tidak ada kesimpulan
• Apakah anda berasal dari desa di sebelah barat ?	Ya	Ya	Bukan	Bukan	Jawaban "ya" berarti desa baik di barat. Jawaban "bukan" berarti desa baik di timur
• Apakah anda berasal dari desa baik ?	Ya	Ya	Ya	Ya	Tidak ada kesimpulan

Satu-satunya pertanyaan yang dapat mengarah pada informasi lokasi desa baik adalah : "Apakah anda berasal dari desa di sebelah Barat ?". Apapun posisi desa di gambar 1.2, jawaban ya, berarti desa "baik" berada di Barat jalan. Jawaban "tidak" berarti desa "baik" berada di Timur jalan.

Pertanyaan analogi lain yang bisa dipakai adalah : "Apakah anda berasal dari desa di sebelah Timur ?". Jawaban ya, berarti desa "baik" di Timur jalan. Jawaban "tidak" berarti desa "baik" di Barat jalan.

Kalimat Berkuantor

Soal 1.32

a. Misalkan D adalah himpunan bilangan bulat.

Buktikan bahwa kalimat $(\exists m \in D)$ $m^2 = m$ bernilai benar.

b. Misalkan E adalah himpunan bilangan bulat antara 5 dan 10.

Buktikan bahwa kalimat $\exists m \in E$ $m^2 = m$ bernilai salah.

Penyelesaian

Kalimat $(\exists x)$ $p(x)$ bernilai benar bila kita dapat menunjukkan bahwa ada satu x (atau lebih) yang memenuhi sifat p.

a. Untuk $m = 1 \in D$, $m^2 = 1^2 = 1 = m$.

Jadi kalimat $(\exists m \in D)$ $m^2 = m$ benar untuk m = 1

Terbukti bahwa kalimat $(\exists m \in D)$ $m^2 = m$ benar.

b. Untuk $5 \leq m \leq 10$, $5^2 = 25 \neq 5$; $6^2 = 36 \neq 6$; …. ; $10^2 = 100 \neq 10$

Berarti tidak ada satupun $m \in E$ yang memenuhi relasi $m^2 = m$.

Jadi kalimat $\exists m \in E$ $m^2 = m$ salah.

Soal 1.33

Di rumahnya, Angel memiliki 7 ekor anjing coklat, 2 anjing hitam, 6 kucing abu-abu, 10 kucing hitam, 5 burung biru, 6 burung kuning, dan 1 ekor burung hitam. Tentukan mana diantara pernyataan berikut ini yang benar dan mana yang salah.

a. Ada hewan di rumah Angel yang berwarna merah

b. Setiap hewan di rumah Angel berwarna coklat, abu-abu atau hitam

c. Ada hewan di rumah Angel yang bukan kucing dan bukan anjing

d. Tidak ada hewan di rumah Angel yang berwarna biru

Penyelesaian :

Hewan yang ada di rumah Angel adalah : anjing, kucing, burung

Warna hewan di rumah Angel adalah : coklat, hitam, abu-abu, biru, kuning

a. Pernyataan salah. Tidak ada satupun hewan yang berwarna merah

b. Pernyataan salah. Ada hewan di rumah Angel yang berwarna biru atau kuning

c. Pernyataan benar. Ada hewan yang bukan kucing dan bukan anjing, yaitu burung

d. Pernyataan salah. Ada burung di rumah Angel yang berwarna biru

Soal 1.34

Misalkan semesta pembicaraan adalah himpunan mahasiswa peserta kuliah Logika Matematika

S (x,y) : "x menyukai y "

P(x,y) : "x lebih pandai dari y"

Nyatakan kalimat berikut ini dalam bentuk simbolik

a. Ada mahasiswa yang paling pandai di kelas Logika Matematika

b. Ada mahasiswa yg tidak disukai oleh semua mahasiswa peserta kuliah Logika Matematika

Penyelesaian :

a. $\exists x \quad \forall y \quad P \quad x, y$

b. $\exists x \quad \forall y \quad \neg S \quad y, x$

Soal 1.35

Nyatakan kalimat di bawah ini dengan menggunakan kuantor $\forall$ atau $\exists$

a. Setiap bilangan adalah negatif atau mempunyai akar riil.

b. Ada bilangan yang tidak riil.

c. Tidak semua mobil mempunyai karburator.

d. Semua dinosaurus telah musnah

e. Tidak ada ahli matematika yang malas

Penyelesaian :

a. Jika p(x) : "x adalah bilangan negatif"

q(x) : "x mempunyai akar riil"

Maka kalimat (a) dapat ditulis $(\forall x)\ (p(x) \vee q(x))$.

b. Jika p(x) : "x adalah bilangan riil", maka kalimat (b) dapat ditulis sebagai $(\exists x)\ \neg\, p(x)$.

c. Jika q(y) = "mobil y mempunyai karburator", maka kalimat (c) dapat ditulis sebagai $\neg\ ((\forall y)\ q(y)) \equiv (\exists y) \neg\, q(y)$.

d. Jika r(x) = "dinosaurus x telah musnah", maka kalimat (d) dapat ditulis sebagai $\forall x \;\; r \;\; x$

e. Jika s(x) = "Ahli matematika x malas", maka kalimat (e) dapat ditulis sebagai $\neg \;\; \exists x \;\; s \;\; x \;\; \equiv \;\; \forall x \;\; \neg s \;\; x$

Soal 1.36

Carilah contoh penyangkal (counter example) untuk menunjukkan bahwa pernyataan berikut ini salah.

a. $\forall$ bilangan ril x, $x > 1/x$

b. $\forall$ bilangan bulat a, $(a-1)/a$ bukan bilangan bulat

c. $\forall$ bilangan bulat positip m dan n, $m.n \geq m+n$

Penyelesaian :

Untuk menunjukkan bahwa $\forall x \;\; p(x)$ salah, kita cukup mencari sebuah nilai a sehingga p(a) salah

a. Untuk x = 0,5 maka 1/x = 2 sehingga x < 1/x

b. Untuk a = 1, maka (a-1)/a = (1-1)/1 = 0 yang merupakan bilangan bulat

c. Untuk m=1 dan n=2, maka m.n = 1.2 = 2 sedangkan m+n = 1+2 = 3 sehingga m.n < m+n

Soal 1.37

Misalkan semesta pembicaraan adalah S = {1, 2, 3, ... , 10}

Tentukan nilai kebenaran pernyataan logika di bawah ini.

a. $(\forall x)(\forall y)\; x^2 + y^2 \geq 2$

b. $(\exists x)(\forall y)\; x > y$

c. $(\exists x)(\exists y)\; 3x + 3y - 5 = 0$

d. $(\exists x)(\exists y)\; x^2 < y + 1$

e. $(\forall x)(\exists y)\; x \geq y$

f. $(\forall x)(\exists y)\; x^2 + y^2 \; < \; 110$

g. $(\forall x)(\forall y)\; x + y < 20$

h. $(\exists x)(\exists y)\; x + y \leq 1$

Penyelesaian :

a. Nilai terkecil anggota S = 1. Untuk x=y=1, $x^2+y^2 = 1^2+1^2 = 2$. Karena x=y=1 adalah nilai terkecil dalam S, jelas bahwa untuk semua x,y anggota S lainnya, $x^2+y^2 \geq 2$. Jadi pernyataan benar

b. Pernyataan salah. Untuk y=10, maka tidak ada satupun x yang memenuhi x > y. Pernyataan akan benar jika relasi ">" diganti "≥" (sehingga menjadi $\exists x \quad \forall y \quad x \geq y$) Elemen x yang memenuhi pernyataan tersebut adalah x=10

c. 3x+3y-5 = 0 ekuivalen dengan 3(x+y)=5 atau x+y = 5/3. Pernyataan semula dapat diganti dengan $\exists x \quad \exists y \quad x + y = 5/3$. Pernyataan ini salah karena semua anggota S adalah bilangan bulat sehingga jumlahnya tidak mungkin sama dengan 5/3

d. Pernyataan benar. Ada banyak x dan y yang memenuhi sifat tersebut, misal x=1,y=1 ; x=2,y=5, dst

e. Pernyataan benar. Untuk x=1, ambil y=1. Untuk x=2, ambil y=1 atau y=2, dan seterusnya

f. Pernyataan benar. Untuk tiap x, terdapat banyak y yang bisa diambil sehingga pernyataan benar. Sebagai contoh, untuk x=1, bisa diambil y=1, atau y=2 … atau y=10.

g. Pernyataan salah. Tidak semua x dan y memenuhi relasi x+y<20. Jika x=10 dan y=10, maka x+y=20 $\not<$ 20

h. Pernyataan salah. Untuk nilai x dan y terkecil sekalipun, yaitu x=1 dan y=1, x+y=2 > 1. Untuk x dan y lainnya, jelas jumlahnya > 1

Soal 1.38

Misalkan semesta pembicaraan adalah bilangan Bulat. Tentukan nilai kebenaran kalimat berkuantor berikut ini.

a. $(\forall x)(\exists y)\, x^2 = y$

b. $(\forall y)(\exists x)\, x^2 = y$

c. $(\forall x)(\forall y)\, x^2 = y$

d. $(\exists x)(\exists y)\ \{(x + 2y = 4) \wedge (2x - y = 2)\}$

Penyelesaian :

a. Kalimat tersebut dibaca : Setiap bilangan bulat memiliki kuadrat. Kalimat bernilai benar. Untuk x=1, ada y=1. Jika x=2, ada y=4, dan seterusnya

b. Kalimat tersebut dapat ditulis sebagai : $\forall y \quad \exists x \quad x=\sqrt{y}$ sehingga dibaca : setiap bilangan bulat memiliki akar yang bulat. Pernyataan ini salah. Sebagai contoh, untuk y=3, x yang memenuhi relasi adalah $\sqrt{3}$. Akan tetapi $\sqrt{3}$ bukan bilangan bulat sehingga tidak ada x yang memenuhi.

c. Kalimat dapat dibaca sebagai : " setiap bilangan bulat sama dengan kuadratnya". Jelas kalimat ini salah. Untuk x=2 dan y=3, jelas $2^2 \neq 3$

d. Untuk menentukan ada/tidaknya x dan y yang memenuhi relasi tersebut, maka kedua persamaan harus diselesaikan

$$\begin{array}{l|l|rl}
x+2y=4 & 1\times & x+2y & =4 \\
2x-y=2 & 2\times & \underline{4x-2y} & \underline{=4\ +} \\
 & & 5x & =8 \\
 & & x & =8/5
\end{array}$$

Jika x=8/5 disubstitusikan ke persamaan salah satu persamaan, didapat y=6/5. Jadi yang memenuhi persamaan adalah x=8/5 dan y=6/5. Keduanya bukan bilangan bulat sehingga kalimat bernilai salah.

Soal 1.39

Misalkan semesta adalah himpunan bilangan riil positip. Berapakah x supaya kalimat berikut ini benar

a. $(\exists x)(\forall y)$ y - x = y

b. $(\forall y)(\exists x)$ xy = 1

Penyelesaian :

a. x yang memenuhi sifat y-x = y adalah x=0. Karena semestanya adalah bilangan riil positip, maka tidak ada x yang memenuhi. Jadi kalimat bernilai salah

b. x yang memenuhi relasi xy=1 adalah x=1/y. Karena y adalah bilangan riil positip, maka x=1/y adalah bilangan riil positip juga. Jadi kalimat bernilai benar

Soal 1.40

Diketahui kalimat dengan simbol logika $\exists x \quad \forall y \quad x < y$

a. Tuliskan arti kalimat tersebut dalam bahasa sehari-hari

b. Untuk semesta apakah kalimat tersebut bernilai benar ?

c. Untuk semesta apakah kalimat tersebut bernilai salah ?

Penyelesaian :

a. Dalam bahasa sehari-hari, simbol logika tersebut dapat dibaca sebagai : "ada sebuah bilangan yang lebih kecil dari semua bilangan lainnya" atau "ada bilangan terkecil"

b. Kalimat ini bernilai benar jika semestanya adalah himpunan yang memiliki bilangan terkecil. Sebagai contoh :

- Semesta S = {3,5,6,7,10}. X yang memenuhi adalah x=3
- Semesta adalah himpunan bilangan Asli (bulat positip). x yang memenuhi adalah x=1
- Semesta adalah himpunan bilangan cacah. x yang memenuhi adalah x=0

c. Kalimat bernilai salah jika semestanya tidak memiliki bilangan terkecil, misal himpunan bilangan riil, himpunan bilangan bulat

Soal 1.41

Misal p(x) : " x adalah bilangan prima " dan q(x) : " x+6 adalah bilangan prima ".

Nyatakanlah kalimat "tidak ada bilangan bulat x sedemikian hingga x prima dan x+6 prima" dalam simbol logika

Penyelesaian :

Misalkan semestanya adalah himpunan bilangan bulat. Untuk memudahkan, mula-mula kita hilangkan kata "tidak" di depan. Dalam simbol logika : $\exists x \ \ p(x) \wedge q(x)$.

Jika kata "tidak" kita tambahkan di depan, akan diperoleh simbol logika kalimat semula yaitu :

$$\neg \ \exists x \ \ p(x) \wedge q(x) \equiv \ \forall x \ \neg \ \ p(x) \wedge q(x) \ \ \equiv \ \forall x \ \neg p(x) \vee \neg q(x)$$

Soal 1.42

Tulislah ingkaran kalimat-kalimat berikut ini :

a. Beberapa bilangan riil adalah bilangan rasional.

b. Semua program PHP mempunyai panjang lebih dari 20 baris.

c. Untuk setiap x, jika x bilangan genap maka x^2+x juga genap (semesta : himpunan bilangan bulat)

d. Terdapatlah x sedemikian hingga x bilangan genap dan x bilangan prima (semesta : himpunan bilangan bulat)

e. Untuk semua bilangan bulat n, jika n^2 genap, maka n genap

f. Untuk setiap bilangan riil x, jika x(x+1) > 0 maka x > 0 atau x < -1

Penyelesaian :

a. Kalimat mula-mula : ($\exists x \in$ Riil) (x = rasional)

Ingkaran : ($\forall x \in$ Riil) (x $\neq$ Rasional)

Atau : Semua bilangan riil tidak rasional.

b. Kalimat mula-mula : ($\forall x \in$ program PHP) (panjang $x > 20$ baris)

Ingkaran : ($\exists x \in$ program PHP) (panjang $x \leq 20$ baris)

Atau : Ada program PHP yang panjangnya kurang atau sama dengan dari 20 baris.

c. Misal Z = himpunan bilangan bulat

$p(x)$: x bilangan genap

$q(x)$: x^2+x bilangan genap

Kalimat mula-mula : $(\forall x \in Z)\ (p(x) \Rightarrow q\ (x))$

Ingkaran : $(\exists x \in Z)\ \neg\ (p(x) \Rightarrow q(x))$

$(\exists x \in Z)\ \neg\ (\neg\ p(x) \vee q(x))$

$(\exists x \in Z)\ (p(x) \wedge \neg\ q(x))$

Atau : "Ada bilangan bulat x yang merupakan bilangan genap, tetapi x^2+x bukan genap"

d. Misal Z = himpunan bilangan bulat

Misalkan $p(x)$: x bilangan genap

$q(x)$: x bilangan prima

Kalimat mula-mula : $(\exists x \in Z)\ (p(x) \wedge q(x))$

Ingkaran : $(\forall x \in Z)\ \neg\ (p(x) \wedge q(x))$

$(\forall x \in Z)\ (\neg\ p(x) \vee \neg\ q(x))$

Atau : "Semua bilangan bulat bukan bilangan genap atau bukan bilangan prima"

e. Kalimat mula-mula : ($\forall n \in$ Bulat) n^2 genap $\Rightarrow n$ genap

Ingkaran : ($\exists n \in$ Bulat) n^2 genap $\wedge\ n$ tidak genap

Atau : Ada bilangan bulat yang tidak genap tetapi kuadratnya genap.

f. Kalimat mula-mula :

$$(\forall x \in \text{Riil})\ \ x\ \ x+1\ \ > 0 \Rightarrow \ \ x > 0\ \vee\ x < -1$$

Ingkaran :

$$(\exists x \in \text{Riil})\ \ x\ \ x+1\ \ > 0\ \wedge\ \neg\ \ x > 0\ \vee\ x < -1$$

$$\equiv\ (\exists x \in \text{Riil})\ \ x\ \ x+1\ \ > 0\ \wedge\ \ x \leq 0\ \ \wedge\ \ x \geq -1$$

Atau : Ada bilangan riil x yang terletak antara -1 dan 0 yang memenuhi x(x+1) > 0.

Soal 1.43

Diketahui kalimat : " Untuk setiap bilangan m, n (m<n), terdapatlah bilangan p sedemikian hingga m < p dan p < n"

a. Nyatakan kalimat tersebut dalam bahasa sehari-hari

b. Pada semesta himpunan bilangan apakah kalimat tersebut bernilai True ? bernilai False ?

c. Misalkan semestanya adalah bilangan Riil Positif. Tentukan nilai p agar kalimat bernilai benar

d. Tuliskan ingkaran kalimat tersebut. Pada semesta himpunan bilangan apakah ingkarannya bernilai benar ?

e. Misalkan posisi kedua kuantor dibalik (sehingga kalimat menjadi : "Terdapatlah bilangan p sedemikian hingga untuk setiap bilangan m dan n (m<n), berlakulah m < p dan p < n ". Untuk semesta apakah kalimat tersebut bernilai benar ?

Penyelesaian

a. Kalimat bisa dinyatakan sebagai : " Untuk setiap bilangan m, n (dengan m<n), terdapatlah bilangan p sedemikian hingga m<p<n". Dalam bahasa sehari-hari : "Untuk setiap 2 bilangan m dan n, selalu ada bilangan lain yang terletak diantaranya"

b. Kalimat bernilai True untuk semesta bilangan riil (atau bilangan riil positip, bilangan riil negatif), himpunan bilangan rasional.

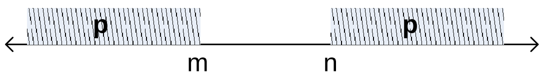
   Jika semestanya bilangan riil, ambil p=(m+n)/2. Sebagai contoh, jika m=2,3 dan n=2,4. Maka p=(2,3 + 2,4)/2 = 2,35.

   Jika semestanya himpunan bilangan rasional dan m=2/7 dan n=3/7, maka p=(m+n)/2 = 5/14

   Sebaliknya, kalimat akan bernilai False jika semestanya adalah himpunan bilangan Asli atau Cacah. Jika semestanya bilangan asli dengan m=3 dan n=4, maka kita tidak dapat menemukan bilangan asli yang terletak antara 3 dan 4

c. Agar kalimat benar untuk semesta bilangan riil positip, ambil p=(m+n)/2. Jika m dan n adalah 2 bilangan riil positip, maka p pasti juga bilangan riil positip sehingga memenuhi syarat.

d. Ingkaran : Terdapatlah bilangan m, n (dengan m<n), sehingga untuk setiap bilangan p, $m \geq p$ atau $p \geq n$. Ingkaran kalimat dapat diilustrasikan dalam gambar 1.3



Gambar 1.3

   Ingkaran bernilai benar jika semestanya himpunan bilangan asli (atau cacah). Pasangan m dan n yang memenuhi adalah 2 bilangan berurutan, misal m=2, n=3. Jika demikian maka semua bilangan asli p lainnya pasti ≤ 2 atau ≥ 3.

   Akan tetapi jika semestanya himpunan bilangan riil, maka ingkaran kalimat akan bernilai salah karena berapapun bilangan m dan n yang kita pilih, pasti selalu ada bilangan riil lain yang terletak diantaranya. Misalkan m=2 dan n=3. Pasti ada bilangan riil yang terletak antara m dan n (contoh : 2,5)

e. Jika kedua kuantor dibalik, kalimat dapat dinyatakan dalam bahasa sehari-hari sebagai : "Ada suatu bilangan p yang selalu terletak diantara 2 buah bilangan lain". Pada soal (b), bilangan p yang memenuhi syarat selalu tergantung dari nilai m dan n yang diberikan. Jadi kalau kalimatnya menyatakan "ada bilangan p yang memenuhi syarat bagi semua bilangan lain", kalimat ini akan selalu bernilai salah, apapun semesta pembicaraannya.

Soal 1.44

Nyatakan kalimat di bawah ini dengan menggunakan kuantor ganda

a. Ada bintang film yang disukai oleh semua orang
b. Untuk setiap bilangan positip, terdapatlah bilangan positip lain yang lebih kecil darinya
c. Terdapatlah bilangan positip x sedemikian hingga untuk semua bilangan positip y, berlakulah $y < x$
d. Tidak ada bilangan bulat yang terbesar

Penyelesaian :

a. Misalkan semestanya adalah himpunan semua manusia dan p(x,y) = y menyukai x. Maka kalimat dapat dituliskan sebagai $(\exists x)(\forall y)$ p(x,y).

b. Kalimat mula-mula bisa dinyatakan sebagai : "Untuk setiap bilangan positip x, terdapatlah bilangan positip y sedemikian sehingga $y < x$".

   Dalam simbolik logika : ($\forall$ bilangan positif x) ($\exists$ bilangan positip y) $y < x$.

   Jika semestanya bilangan riil, kalimat tersebut menyatakan bahwa setiap kita mengambil sebuah bilangan riil, akan ada bilangan riil lain yang lebih kecil darinya. Dengan kata lain : tidak ada bilangan riil positip yang terkecil.

c. Seperti pada soal (b), dalam simbol logika, kalimat mula-mula dapat dinyatakan sebagai

   ($\exists$ bilangan positip x) ($\forall$ bilangan positip y) $y < x$.

d. Misal semestanya adalah himpunan bilangan bulat.

Kalimat "Ada bilangan bulat yang terbesar" dapat dinyatakan sebagai : $\exists n \quad \forall m \quad n > m$. Kalimat "Tidak ada bilangan bulat yang terbesar" merupakan ingkarannya, yang dalam simbol logika dinyatakan sebagai :

$$\neg\ \exists n \quad \forall m \quad n > m \equiv \quad \forall n \quad \exists m \quad n \leq m \equiv \quad \forall n \quad \exists m \quad m \geq n$$

Soal 1.45

Diketahui pernyataan : "$\forall$ bilangan riil $x \neq 0$, $\exists$ bilangan riil y sedemikian hingga x.y = 1". Untuk setiap nilai x berikut ini, tentukan y yang membuat predikat x.y = 1 benar

a. x = 2 b. x = -1 c. x = 3/4

Penyelesaian :

xy=1 berarti y=1/x

a. y = 1/2 b. y = 1/(-1) = -1 c. y = 4/3

Soal 1.46

Tuliskan kalimat berkuantor dibawah ini dalam bahasa sehari-hari

a. ($\exists$ buku b) ($\forall$ orang p) p membaca b

b. ($\forall$ bilangan riil x) ($\exists$ bilangan riil y) x + y = 0

Penyelesaian :

a. Ada buku yang dibaca oleh semua orang

b. Jika lawan bilangan x adalah (–x), maka kalimat dapat dinyatakan dalam bahasa sehari-hari sebagai : "Setiap bilangan riil memiliki lawan"

Soal 1.47

Untuk setiap pernyataan berikut ini, tulislah pernyataan baru yang didapat dengan menukar simbol $\forall$ dan $\exists$. Lalu tentukan pernyataan mana yang benar : pernyataan mula-mula, pernyataan baru, kedua-duanya benar atau kedua-duanya salah

a. ($\forall$ bilangan riil x) ($\exists$ bilangan riil y) $x < y$

b. ($\exists$ bilangan riil x) ($\forall$ bilangan riil negatif y), $x > y$

Penyelesaian :

a. Dalam bahasa sehari-hari, pernyataan awal berarti "setiap kali diberikan bilangan riil, kita bisa mendapatkan bilangan riil lain yang lebih besar darinya". Dengan kata lain "tidak ada bilangan riil yang terbesar". Pernyataan ini benar

   Jika kuantor dibalik, pernyataan menjadi : ($\exists$ bilangan riil x) ($\forall$ bilangan riil y) $x < y$". Dalam bahasa sehari-hari, kalimat ini berarti : "ada suatu bilangan riil yang lebih kecil dari semua bilangan riil lainnya". Dengan kata lain : "ada bilangan riil terkecil". Pernyataan ini bernilai salah karena dalam himpunan bilangan riil tidak ada bilangan yang terbesar maupun yang terkecil

b. Dalam bahasa sehari-hari, kalimat dapat dibaca : "Terdapat suatu bilangan riil yang lebih besar dari semua bilangan riil negatif". Kalimat ini bernilai benar. Sebagai contoh, bilangan riil 5 lebih besar dari semua bilangan riil negatif

   Jika kuantor dibalik, pernyataan menjadi : "($\forall$ bilangan riil x) ($\exists$ bilangan riil negatif y), $x > y$". Dalam bahasa sehari-hari, kalimat ini berarti : "jika diberikan suatu bilangan riil, kita selalu dapat menemukan bilangan riil negatif lain yang lebih kecil darinya". Dengan kata lain : "tidak ada bilangan riil negatif yang terkecil". Pernyataan ini bernilai benar.

Aljabar Boole

Soal 1.48

Suatu fungsi Boole $f = 0,1^{3} \to 0,1$ didefinisikan dengan aturan :

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3) \bmod 2.$$

Nyatakan f dengan menggunakan tabel masukan/keluaran !

Penyelesaian :

$f(1, 1, 1) = (1+1+1) \bmod 2 = 3 \bmod 2 = 1$

$f(1, 1, 0) = (1+1+0) \bmod 2 = 2 \bmod 2 = 0.$

dst ...

Didapat tabel masukan/keluaran yang dinyatakan pada tabel 1.18

Tabel 1.18

Masukan			Keluaran
x_1	x_2	x_3	$(x_1 + x_2 + x_3) \bmod 2$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Soal 1.49

Buatlah tabel untuk ekspresi Boole E dalam 3 variabel x, y, z

$$E = x'yz' \vee xy'z' \vee xy'z \vee xyz'$$

Penyelesaian :

Tabel 1.19

x	y	z	x'yz'	xy'z'	xy'z	xyz'	E
1	1	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

E merupakan gabungan dari 4 buah Minterm masing-masing x'yz' , xy'z' , xy'z dan xyz'. Setiap minterm (kolom) hanya mempunyai tepat satu keluaran bernilai 1. Untuk minterm yang berbeda, posisi nilai 1 tersebut juga pasti akan terletak pada baris yang berbeda. Karena E merupakan gabungan dari ke-4 minterm yang dihubungkan dengan " $\vee$ ", maka E akan bernilai = 1 pada baris dimana salah satu minterm bernilai = 1.

Soal 1.50

Telitilah apakah kedua ekspresi Boole di bawah ini ekuivalen

E_1 : $xy \vee xyz \vee z$ dan E_2 : $xy \vee z$

Penyelesaian :

Ekuivalensi dua ekspresi Boole dapat dilakukan dengan menggunakan hukum-hukum dalam aljabar Boole atau menggunakan tabel masukan-keluaran

- Menggunakan hukum aljabar Boole

$xy \vee xyz \vee z$	$=$	$xy\ (1 \vee z) \vee z$	Hukum Distributif
	$=$	$xy.1 \vee z$	Hukum Ikatan
	$=$	$xy \vee z$	Hukum Identitas

Karena E_2 bisa didapat dari E_1 maka, disimpulkan bahwa $E_1 = E_2$

- Menggunakan tabel masukan-keluaran

Tabel masukan dan keluaran E_1 dan E_2 dapat dilihat pada tabel 1.20 Dalam tabel 1.20, tampak bahwa semua nilai fungsi E_1 dan E_2 sama. Ini berarti bahwa $E_1 = E_2$

Tabel 1.20

x	y	z	xy	xyz	$E_1 = xy \vee xyz \vee z$	$E_2 = xy \vee z$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1	1
1	0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	0	0

Soal 1.51

Diketahui fungsi Boole $f(x, y, z) = xy' \vee xyz' \vee x'yz'$. Buktikan bahwa : $f(x,y,z) \vee xz' = f(x,y,z)$

Penyelesaian :

$$f(x,y,z) \vee xz' = xy' \vee xyz' \vee x'yz' \vee xz'$$

$$= xy' \vee xyz' \vee x'yz' \vee x1z'$$

$$= xy' \vee xyz' \vee x'yz' \vee x \;\; y \;\vee y'\; z'$$

$$= xy' \vee xyz' \vee x'yz' \vee xyz' \vee xy'z'$$

$$= xy' \vee xyz' \vee x'yz' \vee xy'z'$$

$$= xyz' \vee x'yz' \vee \; xy'z' \vee xy'$$

$$= xyz' \vee x'yz' \vee xy' \; z' \vee 1$$

$$= xyz' \vee x'yz' \vee xy'1$$

$$= xy' \vee xyz' \vee x'yz'$$

$$= f(x,y,z) \quad \text{(terbukti)}$$

Soal 1.52

Jadikan ekspresi $E = (x \vee yz')(yz)'$ dalam bentuk DNF.

Penyelesaian :

Ada 2 cara untuk membuat bentuk DNF, yaitu dengan membuat tabel dan dengan merubah ekspresi secara langsung.

a. Nilai kebenaran ekspresi $E = (x \vee yz')(yz)'$ dapat dinyatakan dalam tabel 1.21

Tabel 1.21

Baris	**x**	**y**	**z**	**yz'**	**x∨ yz'**	**yz**	**(yz)'**	**E**
1	1	1	1	0	1	1	0	0
2	1	1	0	1	1	0	1	1
3	1	0	1	0	1	0	1	1
4	1	0	0	0	1	0	1	1
5	0	1	1	0	0	1	0	0

6	0	1	0	1	1	0	1	1
7	0	0	1	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0

Nilai $E = 1$ terjadi pada baris 2, 3, 4 dan 6 yang masing-masing bersesuaian dengan minterm xyz', $xy'z$, $xy'z'$, dan $x'yz'$ sehingga $E = xyz' \vee xy'z \vee xy'z' \vee x'yz'$.

b. Penurunan langsung dengan menggunakan hukum-hukum aljabar Boole.

$(x \vee yz')(yz)' = (x \vee yz')(y' \vee z')$ hukum De Morgan

$= x(y' \vee z') \vee (yz')(y' \vee z')$ sifat distributif

$= (xy' \vee xz') \vee (yz'y' \vee yz')$ sifat distributif

$= xy' \vee xz' \vee yz'$

$xy' \vee xz' \vee yz'$ merupakan ekspresi yang merupakan gabungan dari literal-literal, tapi bukan merupakan gabungan dari minterm dalam x, y dan z (suku pertama tidak memuat z, suku kedua tidak memuat y dan suku ketiga tidak memuat x). Untuk merubah supaya menjadi minterm dapat dilakukan dengan cara menambahkan variabel yang belum ada

$$xy' = xy'.1 = xy'(z \vee z') = xy'z \vee xy'z'$$

$$xz' = x.1z' = x(y \vee y')z' = xyz' \vee xy'z'$$

$$yz' = 1.yz' = (x \vee x')yz' = xyz' \vee x'yz'$$

sehingga $E = (xy'z \vee xy'z') \vee (xyz' \vee xy'z') \vee (xyz' \vee x'yz')$.

Dengan menghilangkan suku-suku yang berulang, maka :

$$E = xy'z \vee xy'z' \vee xyz' \vee x'yz'.$$

Soal 1.53

Fungsi XOR (Simbol $\oplus$) dapat dinyatakan dalam DNF sebagai : $x_1 \oplus x_2 = x_1x_2' \vee x_1'x_2$

Ubahlah ekspresi $E = (x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1 \oplus x_2)$ ke dalam bentuk DNF

Penyelesaian :

$$\begin{aligned}(x_1 \oplus x_2)' \oplus (x_1 \oplus x_2) &= (x_1 \oplus x_2)' (x_1 \oplus x_2)' \vee (x_1 \oplus x_2)(x_1 \oplus x_2) \\ &= (x_1 \oplus x_2)' \vee (x_1 \oplus x_2) \\ &= (x_1 x_2' \vee x_1' x_2)' \vee (x_1 x_2' \vee x_1' x_2) \\ &= 1 \quad \text{(Hukum Negasi)}\end{aligned}$$

Ini berarti bahwa bentuk DNF nya merupakan gabungan dari semua Minterm yang dapat dibuat dengan 2 variabel x_1 dan x_2.

Jadi $E = x_1x_2 \vee x_1x_2' \vee x_1'x_2 \vee x_1'x_2'$

Cara lain untuk mencari DNF adalah dengan membuat tabel kebenaran fungsi XOR, seperti yang tampak pada tabel 1.22

Tabel 1.22

Baris	**x1**	**x2**	$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \oplus x_2)'$	**E**
1	1	1	0	1	1
2	1	0	1	0	1
3	0	1	1	0	1
4	0	0	0	1	1

Nilai $E = 1$ terjadi pada semua baris. Jadi bentuk DNF nya adalah : $x_1x_2 \vee x_1x_2' \vee x_1'x_2 \vee x_1'x_2'$

Rangkaian Logika

Soal 1.54

Buatlah ekspresi Boole dalam 3 variabel P, Q dan R yang sesuai dengan tabel 1.23 dan kemudian gambarkan rangkaiannya

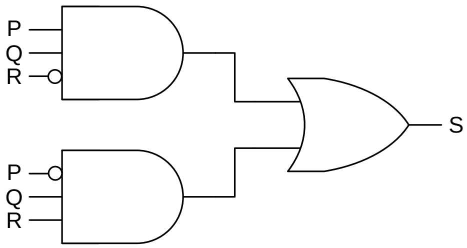
Tabel 1.23

P	Q	R	S
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Penyelesaian :

Baris yang menghasilkan S=1 terjadi pada baris ke 2 dan 5. Maka bentuk DNF yang sesuai adalah $S = PQR' \vee P'QR$

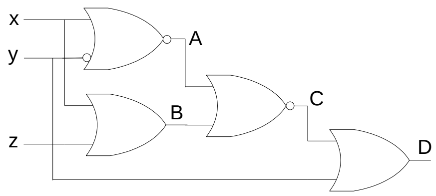
Rangkaiannya tampak pada gambar 1.4



Gambar 1.4

Soal 1.55

Carilah ekspresi Boole untuk rangkaian gambar 1.5 berikut ini, kemudian sederhanakanlah !



Gambar 1.5

Penyelesaian :

Gerbang A menghasilkan keluaran $(x \vee y')'$

Gerbang B menghasilkan keluaran $x \vee z$

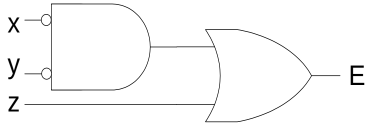
Gerbang C menghasilkan keluaran $((x \vee y')' \vee (x \vee z))'$

Gerbang D memberikan keluaran $((x \vee y')' \vee (x \vee z))' \vee y$.

Ekspresi Boole yang sesuai adalah $E = ((x \vee y')' \vee (x \vee z))' \vee y$, yang dapat disederhanakan sebagai berikut :

$$\begin{aligned} ((x \vee y')' \vee (x \vee z))' \vee y &= ((x \vee y')(x \vee z)') \vee y \\ &= ((x \vee y')(x'z')) \vee y \\ &= (xx'z' \vee y'x'z') \vee y \\ &= y'x'z' \vee y \\ &= (y' \vee y)(x'z' \vee y) \\ &= 1\,(x'z' \vee y) \\ &= x'z' \vee y \end{aligned}$$

Dengan demikian, rangkaian bisa disederhanakan menjadi rangkaian pada gambar 1.6



Gambar 1.6

Soal 1.56

Fungsi mayoritas adalah rangkaian digital yang menghasilkan keluaran = 1, bila dan hanya bila mayoritas masukannya = 1. Jika tidak demikian, keluaran = 0. Buatlah skema rangkaiaanya untuk masukan x, y, z

Penyelesaian :

Jika ada 3 masukan, fungsi mayoritas akan memberikan keluaran = 1 bila dan hanya bila ada ≥ 2 masukan yang berharga 1. Tabel 1.24 menunjukkan masukan-keluaran fungsi mayoritas.

Tabel 1.24

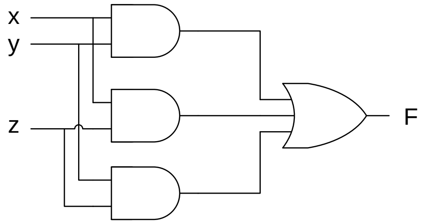
x	y	z	F
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Bentuk DNF didapat dari gabungan Minterm pada baris yang diarsir :

$$
\begin{aligned}
F &= xyz \vee xyz' \vee xy'z \vee x'yz \\
&= (xyz \vee xyz \vee xyz) \vee xyz' \vee xy'z \vee x'yz \\
&= (xyz \vee xyz') \vee (xyz \vee xy'z) \vee (xyz \vee x'yz) \\
&= xy(z \vee z') \vee x(y \vee y')z \vee (x \vee x')yz
\end{aligned}
$$

$= \quad xy \vee xz \vee yz.$

Rangkaiannya tampak pada gambar 1.7



Gambar 1.7

Soal 1.57

Buatlah rangkaian yang akan menghasilkan keluaran = 1 bila dan hanya bila tepat satu diantara masukan x, y, z berharga = 1

Penyelesaian :

Tabel 1.25 menunjukkan masukan-keluaran rangkaian. Karena ada 3 variabel, maka ada tepat 3 keluaran yang bernilai 1

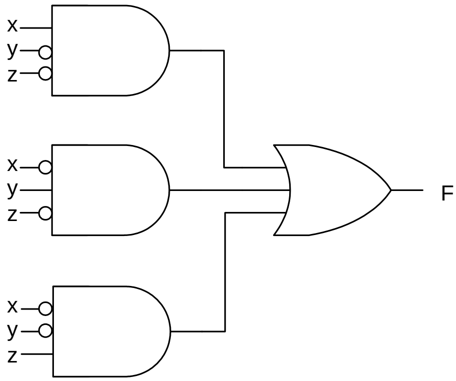
Tabel 1.25

x	**y**	**z**	**F**
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Bentuk DNF nya adalah:

F = $xy'z' \vee x'yz' \vee x'y'z$

Skema rangkaian tampak pada gambar 1.8



Gambar 1.8

SOAL TAMBAHAN

1. Mana diantara kalimat di bawah ini yang merupakan kalimat Deklaratif ?
   a. Untuk setiap bilangan riil berlakulah $x^2 = x$
   b. Penduduk Indonesia berjumlah 50 juta.
   c. $x^2 = x$
   d. Delphi adalah bahasa pemrograman yang terbaik
   e. Jika $xy = xz$ maka $y = z$
2. Misalkan :

   p : David sedang bermain di kolam

   q : David ada di dalam rumah

   r : David sedang mengerjakan PR

   s : David sedang mendengarkan radio

Nyatakanlah kalimat-kalimat di bawah ini dengan simbol-simbol logika berserta dengan penghubung-penghubungnya !

a. David sedang bermain di kolam atau ia ada di dalam rumah

b. David tidak bermain di kolam dan tidak sedang mengerjakan PR

c. David sedang bermain di kolam dan tidak sedang mengerjakan PR

d. David ada di dalam rumah sedang mengerjakan PR sambil mendengarkan radio, dan ia tidak bermain di kolam.

e. Jika David ada di dalam rumah dan tidak mengerjakan PR, ia pasti sedang bermain di kolam sambil mendengarkan radio.

f. David sedang mendengarkan radio jika ia ada di dalam rumah.

3. Dengan menggunakan p, q, r, s seperti pada soal 2, nyatakan simbol-simbol logika di bawah ini dengan kalimat-kalimat bahasa Indonesia yang sesuai :

a. $\neg p \wedge \neg q$

b. $p \vee (q \wedge r)$

c. $\neg \ \neg p \wedge r$

d. $(\neg p \vee q) \wedge (\neg r \vee s)$

e. $(\neg q \wedge p) \Rightarrow s$

f. $(p \Rightarrow \neg r) \vee (q \Rightarrow s)$

4. Tulislah tabel kebenaran pernyataan berikut ini

a. $\neg p \wedge q$

b. $p \wedge \ q \wedge r$

c. $p \vee \ \neg p \vee q \quad \wedge \neg \ q \wedge \neg r$

d. $p \wedge \neg r \Leftrightarrow q \vee r$

e. $p \vee (\neg p \wedge q) \Rightarrow q$

f. $(\neg p \wedge (\neg q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$

5. Jika p, r bernilai False dan q, s bernilai True, tentukan nilai kebenaran kalimat $(s \Rightarrow (p \wedge \neg r)) \wedge ((p \Rightarrow (r \vee q)) \wedge s)$

6. Diketahui : $a \mid b$ berarti a adalah faktor b

   Jika a, b, c, dan d adalah sembarang bilangan bulat, tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut ini :

   a. Jika a | b dan c | d maka ac | bd

   b. Jika a | b dan b | a maka a = b atau b = a

   c. Jika a | b Maka a | bc

   d. Jika $a \nmid bc$ maka $a \nmid b$

   e. Jika a | (b+c) maka a | b atau a | c

   f. Jika a | b dan a | c Maka a^2 | bc

7. Tentukan ingkaran dari kalimat-kalimat berikut ini ?

   a. Jika x tidak negatif, maka x adalah bilangan positif atau x = 0

   b. Jika P adalah bujur sangkar, maka P adalah 4 persegi panjang

8. Sederhanakanlah pernyataan di bawah ini :

   a. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee (\neg p \vee q)$

   b. $(q \Rightarrow p) \wedge (\neg p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow q)$

9. Manakah diantara ekspresi berikut ini yang jika disederhanakan akan menghasilkan $\neg p$

   a. $(p \wedge (\neg(\neg p \vee q))) \vee (p \wedge q)$

b. $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

c. $\neg((\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)) \vee (p \wedge q)$

10. Diketahui kalimat : "Jika cairan X mendidih, maka suhunya paling sedikit adalah 150^0 C"

    a. Tentukan invers, konvers dan kontraposisinya

    b. Tentukan nilai kebenaran tiap kalimat soal (a)

11. Tentukan Invers dari konvers implikasi $p \Rightarrow q$

12. Kalimat di bawah ini yang menunjuk pada segitiga ABC. Tentukan kontraposisinya

    " $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ jika ABC adalah segitiga siku-siku "

13. Diantara yang berikut ini, manakah yang ekuivalen dengan $p \Rightarrow q$

    a. $p \Rightarrow q \;\Rightarrow\; q \Rightarrow p$

    b. $p \Rightarrow q \;\Rightarrow\; p \Rightarrow q$

    c. $q \Rightarrow p \;\Rightarrow\; q \Rightarrow p$

    d. $q \Rightarrow p \;\Rightarrow\; p \Rightarrow q$

14. Buktikan ekuivalensi kalimat-kalimat di bawah ini tanpa menggunakan tabel kebenaran

    a. $\neg\ (\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)\ \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

    b. $p \wedge\ \neg(\neg p \vee q)\ \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

15. Tentukan apakah pasangan-pasangan pernyataan berikut ini ekuivalen

    a. $(r \vee p) \wedge\ \ \neg r \vee (p \wedge q)\ \wedge (r \vee q)$ dengan $p \wedge q$

b. $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p \vee (\neg p \vee q)$ dengan $\neg p \vee q$

16. Apakah pernyataan-pernyataan di bawah ini merupakan Tautologi, Kontradiksi, atau bukan keduanya

    a. $\neg(p \vee \neg q) \vee (\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg p$

    b. $p \wedge q \vee \neg p \vee p \wedge \neg q$

    c. $(p \Rightarrow q) \wedge (\neg q \wedge p)$

    d. $(p \wedge q) \Leftrightarrow p$

    e. $(p \Rightarrow \neg p) \Rightarrow \neg p$

    f. $(\neg q \wedge p) \wedge q$

17. Dalam sebuah pulau terpencil hanya hidup 2 jenis manusia. Jenis pertama adalah kaum Ksatria yang selalu mengatakan kebenaran, dan jenis kedua adalah kaum Penjahat yang selalu mengatakan kebohongan. Suatu hari, anda mengunjungi pulau tersebut dan berbicara dengan 2 orang penduduk pulau tersebut (X dan Y)

    X : "Y adalah Penjahat"
    Y : "X adalah Penjahat"

    Golongan apakah X dan Y ?

Gunakan modus ponens atau modus tollens untuk mengisi titik-titik dalam soal no 18 – 20 berikut ini agar menghasilkan inferensi yang valid

18. Jika potongan program ini adalah perulangan dengan perintah **while**, maka isi perulangan tidak pernah dieksekusi.

    ....

    $\therefore$ Isi perulangan tidak pernah dieksekusi

19. Jika logika adalah pelajaran yang mudah, maka pastilah saya seorang profesor

Saya bukan seorang profesor

$\therefore$ ……………………………………………………………

20. Jika poligon ini adalah suatu segitiga, maka jumlah sudut-sudutnya adalah 180 derajat.

    Jumlah sudut poligon ini tidak 180 derajat.

    $\therefore$ ……………………………………………………………

Tentukan apakah inferensi soal 21 – 22 berikut ini valid. Untuk inferensi yang valid, jelaskan aturan inferensi yang digunakan. Jika tidak valid, jelaskan kesalahan yang terjadi.

21. Jika suatu bilangan lebih besar dari 2, maka kuadratnya lebih besar dari 4

    Bilangan ini tidak lebih besar dari 2

    $\therefore$ Kuadrat bilangan ini tidak lebih besar dari 4

22. Jika salah satu dari bilangannya habis dibagi 6, maka hasil kali kedua bilangan pasti habis dibagi 6

    Kedua bilangan tidak habis dibagi 6

    $\therefore$ Hasil kali kedua bilangan tidak habis dibagi 6

23. Gunakan tabel kebenaran untuk menentukan apakah inferensi berikut ini valid

    a. p

       $p \Rightarrow q$

       $\neg q \vee r$

       $\therefore\ r$

    b. $p \wedge \neg q \Rightarrow r$

       $p \vee q$

       $q \Rightarrow p$

       $\therefore\ r$

24. Tanpa menggunakan tabel kebenaran, tentukan apakah inferensi berikut ini valid

g.
$$\begin{array}{l} p \\ p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore\ r \end{array}$$

h.
$$\begin{array}{l} r \\ p \Rightarrow q \\ q \Rightarrow r \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

i.
$$\begin{array}{l} r \Rightarrow s \\ \neg s \\ \hline \therefore\ \neg r \end{array}$$

j.
$$\begin{array}{l} r \Rightarrow s \\ p \Rightarrow q \\ r \vee p \\ \hline \therefore\ s \vee q \end{array}$$

k.
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

l.
$$\begin{array}{l} p \vee q \\ p \\ \hline \therefore\ \neg q \end{array}$$

m.
$$\begin{array}{l} p \\ \hline \therefore\ p \wedge q \end{array}$$

n.
$$\frac{p \vee q}{\therefore\ p \wedge q}$$

o.
$$\frac{p \vee q}{\therefore\ p}$$

p.
$$\begin{array}{l} p \wedge q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

25. Nyatakan kalimat-kalimat berikut ini dengan simbol-simbol logika, kemudian carilah kesimpulannya
    - Jika saya belajar atau jika saya jenius, maka saya akan lulus ujian Teknik Pemrograman
    - Saya tidak diijinkan untuk mengambil mata kuliah Matematika Diskrit.
    - Jika saya lulus ujian Teknik Pemrograman, maka saya diijinkan untuk mengambil mata kuliah Matematika Diskrit
    - Saya tidak belajar.
26. Pada suatu hari, anda hendak pergi ke kampus dan baru sadar bahwa anda tidak memakai kacamata. Setelah mengingat-ingat, ada beberapa fakta yang anda pastikan kebenarannya :
    a. Jika kacamataku ada di meja dapur, maka aku pasti sudah melihatnya ketika sarapan pagi.
    b. Saya membaca koran di ruang tamu atau saya membacanya di dapur.
    c. Jika saya membaca koran di ruang tamu, maka pastilah kacamata kuletakkan di meja tamu.
    d. Saya tidak melihat kacamataku pada waktu sarapan pagi.

e. Jika saya membaca buku di ranjang, maka kacamata kuletakkan di meja samping ranjang.

f. Jika saya membaca koran di dapur, maka kacamataku ada di meja dapur.

Berdasarkan fakta-fakta tersebut, tentukan dimana letak kacamata anda !

27. Perhatikan pernyataan berikut ini : " $\forall$ artis x, x cantik". Mana diantara pernyataan berikut ini yang ekuivalen dengan pernyataan tersebut

    a. Semua artis cantik

    b. Diantara semua artis, beberapa diantaranya cantik

    c. Beberapa diantara orang cantik adalah artis

    d. Semua orang yang cantik adalah artis

    e. Semua artis adalah orang yang cantik

28. Misalkan semesta pembicaraan adalah himpunan manusia di bumi dan p(x) : " x adalah seorang raksasa "

    a. Nyatakan kalimat : " Beberapa orang di bumi ini bukan raksasa " dengan simbol logika

    b. Kalimat apakah yang dinyatakan dengan simbol $(\forall x)\neg p(x)$?

29. Perhatikan pernyataan berikut ini : " $\exists$ bilangan riil x sedemikian hingga $x^2 = 2$". Mana diantara pernyataan berikut ini yang ekuivalen dengan pernyataan tersebut

    a. Kuadrat setiap bilangan riil adalah 2

    b. Beberapa bilangan riil memiliki kuadrat = 2

    c. Jika x adalah bilangan riil, maka $x^2 = 2$

    d. Terdapatlah paling sedikit sebuah bilangan riil yang kuadratnya = 2

30. Apakah pernyataan $(\forall x)(\exists y)(x^2+1)y=1$ akan bernilai benar untuk semesta himpunan bilangan bulat ? Untuk semesta apakah pernyataan tersebut benar ?

31. Tulislah kalimat-kalimat di bawah ini dalam simbol logika berkuantor

    a. Tidak ada manusia yangpaling tinggi di dunia ini.

    b. Untuk setiap x, $x^2+3 > 5$ atau $x < 2$ (Semesta : himpunan bilangan riil R)

    c. Terdapatlah x yang memenuhi relasi $x^2 = 25$ dan $x > 0$ (Semesta : himpunan bilangan riil R)

    d. Tidak ada x sedemikian sehingga x bilangan prima dan (x+6) bilangan prima (Semesta : himpunan bilangan bulat Z)

    e. Beberapa bilangan riil adalah bilangan bulat

    f. Untuk setiap bilangan x, jika $x^2 > 4$ maka $x > 2$ (Semesta : himpunan bilangan riil R)

    g. Untuk setiap bilangan bulat x, jika $x(x-1) = 0$ maka $x = 0$ atau $x = 1$

32. Tuliskan ingkaran kalimat berkuantor berikut ini :

    a. $\forall$ bilangan riil x, jika $x > 2$ maka $x^2 > 4$

    b. $\forall$ bilangan bulat n, jika n bilangan prima maka n bilangan ganjil atau $n = 2$

    c. $\forall$ bilangan bulat a, b, c, jika (a-b) genap dan (b-c) genap, maka (a-c) genap

33. Misalkan p(n) : "n adalah bilangan prima"

    e(n) : "n adalah bilangan genap"

    Tulislah notasi logika berikut dalam bahasa sehari-hari. Kemudian tentukan nilai kebenarannya

    a. $(\exists m)(\forall n)\ (e(n) \wedge p(m+n))$

b. $(\forall n)(\exists m)\ (\neg e(n) \Rightarrow e(m+n))$

Tulislah kalimat dibawah ini ke dalam simbol logika. Kemudian tentukan nilai kebenarannya.

c. Ada 2 bilangan prima yang jumlahnya genap

d. Jumlah setiap 2 bilangan prima adalah ganjil.

34. Nyatakan kalimat berikut ini menggunakan kuantor ganda

a. Seseorang lebih tua dari semua orang yang lain

b. Setiap bilangan genap sama dengan dua kali bilangan bulat lainnya.

35. Tuliskan kalimat berkuantor berikut ini dalam bahasa sehari-hari

a. ($\forall$ warna C) ($\exists$ hewan A) A berwarna C

b. ($\forall$ bilangan ganjil n) ($\exists$ bilangan bulat k) $n = 2k+1$

36. Tentukan mana diantara ekspresi-ekspresi di bawah ini yang merupakan ekspresi Boole dalam x, y, z

a. 1

b. $xy \vee xz \vee yz$

c. $xyz' \vee x'yz \vee xy'z$

37. Buatlah tabel masukan/keluran fungsi Literal $f : \{0,1\}^2 \rightarrow \{0,1\}$ yang didefinisikan $f(x,y) = y'$

38. Diketahui fungsi Boole $f = \{0,1\}^3 \rightarrow \{0,1\}$ yang didefenisikan sebagai berikut : $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1'x_2)'(x_1 \vee x_2)$. Tulislah tabel nilai fungsi untuk semua harga x_1, x_2, x_3 yang mungkin

39. Carilah bentuk DNF dengan menggunakan hukum-hukum aljabar Boole untuk ekspresi di bawah ini

a. $p' \vee q$ (dalam 2 variabel p dan q)

b. $pq \vee p'r \vee qr$ (dalam 3 variabel p, q, r)

40. Ubahlah ekspresi Boole dalam x_1, x_2, x_3 di bawah ini dalam bentuk

DNF

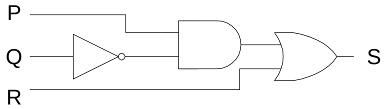
a. $(x_1\, x_2\, x_3') \vee (x_1'\, x_2)$

b. $(x_1 \vee x_2)\, x_3'$

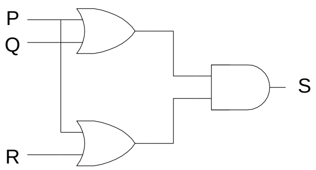
c. $x_1' + ((x_2 + x_3')\,(x_2 x_3)')\,(x_1 + x_2 x_3')$

41. Tentukan keluaran rangkaian berikut ini untuk masukan yang diberikan. Kemudian sederhanakanlah rangkaian tersebut.

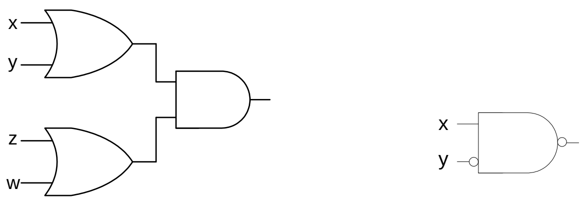
a. Masukan : P = 1, Q = 0, R = 0



b. Masukan : P = 0, Q = 1, R = 0

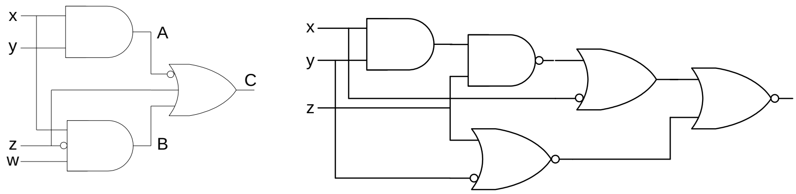


42. Buatlah rangkaian yang ekuivalen dengan rangkaian di bawah ini, tapi hanya terdiri dari gerbang NOR



(a) (b)

43. Carilah ekspresi Boole untuk rangkaian gambar berikut ini, kemudian sederhanakanlah rangkaian tersebut !



(a) (b)

44. Buatlah rangkaian yang akan menghasilkan keluaran = 1 bila dan hanya bila :

    a. Paling sedikit 2 diantara masukan x, y, z, w berharga = 1

    b. x dan y berharga sama serta y dan z berlawanan harga (masukan x, y, z)

45. Buatlah rangkaian dengan masukan p, q, r dan mempunyai keluaran = 0 bila dan hanya bila tepat 2 diantara p, q dan r mempunyai nilai = 0

Bab 2

HIMPUNAN

2.1 Himpunan dan Anggota Himpunan

Himpunan didefinisikan sebagai kumpulan obyek-obyek yang berbeda (Liu, 1986). Himpunan dinotasikan dengan huruf besar A, B, C, ... Obyek dalam dalam himpunan disebut elemen/anggota himpunan, yang disimbulkan dengan huruf kecil.

Ada 2 cara untuk menyatakan himpunan, yaitu dengan menuliskan tiap-tiap anggota himpunan diantara 2 kurung kurawal atau dengan menuliskan sifat-sifat yang ada pada semua anggota himpunan diantara 2 kurung kurawal

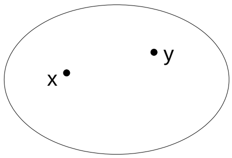
Jika suatu obyek x merupakan anggota dari himpunan A, maka dituliskan $x \in A$ dan dibaca : "x adalah anggota A", atau "x ada dalam A", atau "x adalah elemen A". Sebaliknya jika x bukan anggota A, dituliskan $x \notin A$

Contoh 2.1

- A = {anjing, kucing, burung}
- B = {x | x = hewan-hewan di kebun binatang }
- Jika fungsi mod menyatakan sisa hasil bagi bulat, himpunan bilangan genap dapat dinyatakan dengan C = $x \in Bulat \mid x \bmod 2 = 0$

Jika x = 6 dan y = 9, maka $x \in C$ dan $y \notin C$

Diagram Venn adalah diagram yang digunakan untuk menggambarkan suatu himpunan beserta anggota-anggotanya. Suatu himpunan dinyatakan sebagai suatu lingkaran yang diberi nama himpunan tersebut. Jikalau perlu, anggota-anggota himpunan tersebut dinyatakan sebagai titik-titik didalamnya. Himpunan A = {x,y} dapat dinyatakan dengan diagram Venn pada gambar 2.1



Gambar 2.1

2.2 Himpunan Bagian dan Himpunan Kuasa

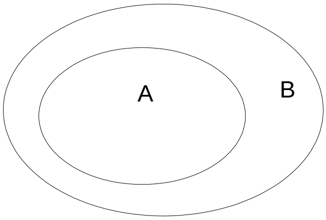
Semesta pembicaraan (simbol S) adalah himpunan semua obyek yang dibicarakan. Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut himpunan kosong, diberi simbol $\varnothing$ atau { }

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan maka A disebut himpunan bagian (subset) dari B bila dan hanya bila setiap anggota A juga merupakan anggota B.

$$A \subseteq B \Leftrightarrow \quad \forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$$

Perhatikan gambar 2.2. Jika A adalah himpunan bagian B, dikatakan juga bahwa B memuat A (simbol $B \supseteq A$)

Jika ada anggota A yang bukan anggota B, berarti A bukan himpunan bagian B (ditulis A $\not\subseteq$ B). Secara matematika, $A \not\subseteq B \Leftrightarrow (\exists x) \in A \wedge x \notin B$



Gambar 2.2

Perhatikan perbedaan antara $\in$ (simbol keanggotaan himpunan) dan $\subseteq$ (simbol himpunan bagian). $x \in A$ berarti bahwa elemen x adalah salah satu diantara elemen-elemen A. Sedangkan $A \subseteq B$ berarti bahwa setiap anggota A merupakan anggota B.

Contoh 2.2

Jika A = {1, 2, {1}, {1,2}}. Perhatikan bahwa A memiliki 4 anggota masing-masing 1, 2, {1} dan {1,2} sehingga

- $1 \in A$, $\{1\} \in A$, $\{1\} \subseteq A$, $\{\{1\}\} \subseteq A$, $\{1, \{1\}\} \subseteq A$

  {1} adalah himpunan yang anggotanya 1, sedangkan {{1}} adalah himpunan yang anggotanya adalah {1}

- $2 \in A$, $\{2\} \notin A$, $\{2\} \subseteq A$, $\{\{2\}\} \notin A$ dan juga $\{\{2\}\} \not\subseteq A$

- $\{1, 2\} \in A$ dan juga $\{1, 2\} \subseteq A$

- $\varnothing \subseteq A$ dan $A \subseteq A$

  Himpunan kosong adalah himpunan bagian dari sembarang himpunan. Setiap himpunan merupakan himpunan bagian dari himpunan itu sendiri

Misalkan A adalah sembarang himpunan. Himpunan Kuasa A (simbol P(A) atau 2^A) adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah semua himpunan bagian A. Jika himpunan A mempunyai n anggota, maka P(A) mempunyai 2^n anggota.

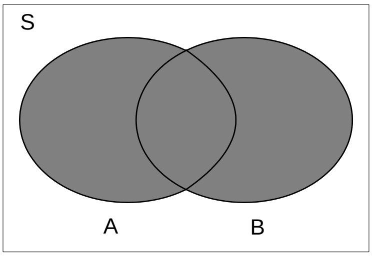
Contoh 2.3

Jika A = {x, y}, maka P(A) = {$\emptyset$, {x}, {y}, {x, y} }. P(A) memiliki $2^2 = 4$ anggota.

2.3 Operasi Pada Himpunan

- Gabungan (Union) dua buah himpunan A dan B (ditulis $A \cup B$) adalah himpunan semua elemen-elemen anggota A atau anggota B. Daerah yang diarsir pada gambar 2.3 adalah himpunan $A \cup B$.

$$A \cup B = \; x \in S \;\mid\; x \in A \vee x \in B$$

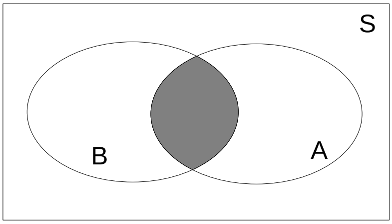


Gambar 2.3

- Irisan (Interseksi) himpunan A dan B (ditulis $A \cap B$) adalah himpunan semua elemen-elemen anggota A dan sekaligus anggota B.

$$A \cap B = \ x \in S \ | \ x \in A \wedge x \in B$$

Daerah yang diarsir pada gambar 2.4 adalah himpunan $A \cap B$.

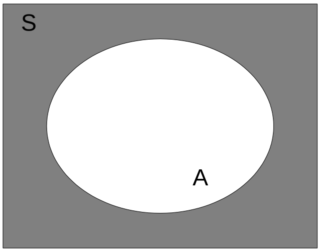


Gambar 2.4

- Komplemen himpunan A (ditulis A^c) adalah himpunan semua elemen dalam S yang bukan anggota A.

$$A^c = \ x \in S \,|\, x \notin A$$

Daerah yang diarsir pada gambar 2.5 menunjukkan himpunan A^c

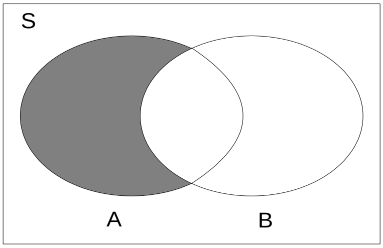


Gambar 2.5

- Selisih himpunan B dari himpunan A (simbol A-B) adalah himpunan semua elemen S yang merupakan anggota A, tapi bukan anggota B.

$$A - B = \ x \in S \,|\, x \in A \wedge x \notin B$$

Daerah yang diarsir pada gambar 2.6 menunjukkan himpunan A-B

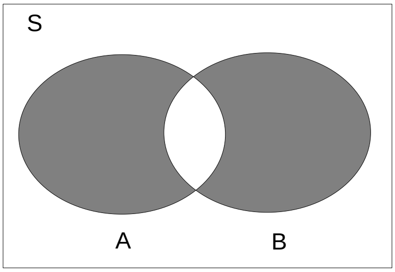


Gambar 2.6

- Operasi XOR pada himpunan (simbol $\oplus$) didefinisikan sebagai berikut

  $$A \oplus B = \{ x \in S \mid x \in A \text{ atau } x \in B \text{ tapi } x \notin A \cap B \}$$
  $$= (A \cup B) - (A \cap B)$$

  Daerah yang diarsir pada gambar 2.7 menunjukkan himpunan $A \oplus B$



Gambar 2.7

Misalkan S adalah Semesta dan A, B, C adalah himpunan-himpunan dalam S. Operator-operator himpunan memenuhi beberapa hukum berikut ini :

1. Hukum Komutatif : $A \cap B = B \cap A$; $A \cup B = B \cup A$

2. Hukum Asosiatif :

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad ; \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3. Hukum Distributif

$$A\cup\ B\cap C\ =\ A\cup B\ \cap\ A\cup C$$
$$A\cap\ B\cup C\ =\ A\cap B\ \cup\ A\cap C$$

4. Irisan dengan S : $A\cap S = A$
5. Gabungan dengan S : $A\cup S = S$
6. Komplemen Ganda : $A^{C\ \ C} = A$
7. Hukum Idempoten : $A\cap A = A$; $A\cup A = A$
8. Hukum De Morgan :

$$A\cup B^{\ c} = A^c \cap B^c \qquad ; \qquad A\cap B^{\ c} = A^c \cup B^c$$

9. Hukum Penyerapan : $A\cup\ A\cap B\ = A$; $A\cap\ A\cup B\ = A$

Terlihat bahwa hukum-hukum yang berlaku pada himpunan merupakan analogi hukum-hukum logika, dengan operator $\cap$ menggantikan $\wedge$ (dan), operator $\cup$ menggantikan $\vee$ (atau).

SOAL DAN PENYELESAIANNYA

Himpunan dan Anggota Himpunan

Soal 2.1

Nyatakan himpunan berikut ini dengan menuliskan semua anggotanya dan dengan menuliskan sifat-sifatnya :

- A = Himpunan bilangan bulat antara 1 dan 5.
- B = Himpunan yang anggotanya adalah : kucing, meja, buku, air.

- C = Himpuna bilangan riil yang lebih besar dari 1.

Penyelesaian :

Cara menuliskan himpunan dengan kedua cara adalah sebagai berikut

Dengan menuliskan anggota-anggotanya	Dengan menuliskan sifat-sifatnya
A = {1, 2, 3, 4, 5}	A = {$x \in$ Bulat | $1 \leq x \leq 5$}
B = {kucing, meja, buku, air}	B tidak bisa dinyatakan dengan cara menuliskan sifat-sifatnya karena tidak ada sifat yang sama di antara anggota-anggotanya
C tidak bisa dinyatakan dengan menuliskan anggota-anggotanya karena jumlah anggota C tak berhingga banyak	C = {$x \in$ Riil | $x > 1$}

Soal 2.2

Misalkan S = {$n \in Z$ | $n = (-1)^k$ untuk suatu bilangan bulat positip k} (dengan Z = himpunan bilangan cacah). Nyatakan himpunan S dengan cara mendaftarkan anggotanya.

Penyelesaian :

Untuk k = 0 → $n = (-1)^0 = 1$

Untuk k = 1 → $n = (-1)^1 = -1$

Untuk k = 2 → $n = (-1)^2 = 1$

Untuk k = 3 → $n = (-1)^3 = -1$ dan seterusnya

Maka S = { -1, 1 }

Himpunan Bagian dan Himpunan Kuasa

Soal 2.3

Misalkan $A = \{c, d, f, g\}$, $B = \{f, j\}$ dan $C = \{d. g\}$. Tentukan apakah relasi-relasi berikut ini yang benar ? Berikan alasannya.

a. $B \subseteq A$

b. $C \subseteq C$

c. $C \subseteq A$

Penyelesaian :

a. $B \not\subseteq A$ karena $j \in B$ tapi $j \notin A$

b. $C \subseteq C$. Setiap himpunan selalu menjadi himpunan bagian dirinya sendiri

c. $C \subseteq A$ karena semua anggota C, yaitu d dan g, menjadi anggota A

Soal 2.4

a. Apakah bilangan 0 ada dalam $\varnothing$? Jelaskan !

b. Apakah $\varnothing = \varnothing$? Mengapa ?

c. Apakah $\varnothing \in \varnothing$? Mengapa ?

Penyelesaian

a. Menurut definisi, himpunan kosong tidaklah memiliki anggota. Jadi bilangan 0 tidak ada dalam $\varnothing$

b. Himpunan $\varnothing$ adalah himpunan yang tidak memiliki anggota.

Himpunan $\varnothing$ adalah himpunan yang anggotanya himpunan kosong. Himpunan ini memiliki satu anggota yaitu $\varnothing$. Jadi jelas bahwa $\varnothing \neq \varnothing$

c. Himpunan $\varnothing$ adalah himpunan yang memiliki satu anggota yaitu $\varnothing$. Jadi benar bahwa $\varnothing \in \varnothing$

Soal 2.5

Buktikan bahwa :

a. Himpunan kosong adalah himpunan bagian semua himpunan. Jadi $\varnothing \subseteq A$ untuk semua himpunan A

b. Himpunan kosong adalah tunggal

Penyelesaian

a. Akan dibuktikan dengan metode kontradiksi

Ambil sembarang himpunan A dan misalkan $\varnothing \not\subseteq A$

Menurut definisi himpunan bagian, $\varnothing \not\subseteq A$ berarti bahwa $(\exists x)$ $x \in \varnothing$ dan $x \notin A$. Terjadilah kontradiksi pada $x \in \varnothing$ karena menurut definisinya, $\varnothing$ adalah himpunan yang tidak mempunyai anggota.

Terbuktilah bahwa $\varnothing \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A.

b. Tunggalnya himpunan kosong juga dibuktikan dengan metode kontradiksi.

Misalkan ada 2 buah himpunan kosong (sebutlah $\varnothing_1$ dan $\varnothing_2$) yang masing-masing tidak mempunyai anggota, dan $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$

Menurut sifat (a), himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari sembarang himpunan A (himpunan A mungkin juga himpunan kosong). Karena $\varnothing_1$ adalah himunan kosong, maka $\varnothing_1 \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A.

Ambil $A = \varnothing_2$. Didapat $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$.

Dipihak lain, $\varnothing_2$ juga himpunan kosong sehingga $\varnothing_2 \subseteq A$ untuk sembarang himpunan A. Ambil $A = \varnothing_1$. Didapat $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$.

Karena $\varnothing_1 \subseteq \varnothing_2$ dan $\varnothing_2 \subseteq \varnothing_1$, maka menurut definisi kesamaan 2 himpunan, $\varnothing_1 = \varnothing_2$. Hal ini bertentangan dengan asumsi di atas yang mengatakan bahwa $\varnothing_1 \neq \varnothing_2$. Jadi terbuktilah bahwa himpunan kosong adalah tunggal

Soal 2.6

Buktikan bahwa jika A adalah sembarang himpunan, maka $A \cap \varnothing = \varnothing$

Penyelesaian :

Untuk membuktikan bahwa $A \cap \varnothing = \varnothing$, cukup dibuktikan bahwa himpunan $A \cap \varnothing$ tidak mempunyai anggota

Pembuktian dilakukan dengan metode kontradiksi.

Misalkan himpunan $A \cap \varnothing$ mempunyai suatu anggota, sebutlah x.

$x \in A \cap \varnothing$ berarti bahwa $x \in A$ dan $x \in \varnothing$. Secara khusus, $x \in \varnothing$.

Terjadilah kontradiksi karena himpunan kosong tidak mempunyai anggota.

Terbuktilah bahwa $A \cap \varnothing$ tidak mempunyai anggota, atau $A \cap \varnothing = \varnothing$

Soal 2.7

Tentukan apakah relasi berikut ini benar. Jelaskan alasannya !

a. {a, b, c} $\subseteq$ {a, b, c, {a, b, c} }

b. $\varnothing \subseteq \varnothing$

c. $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

d. $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

e. $\{\varnothing\} \subseteq \{\{\varnothing\}\}$

Penyelesaian :

a. a, b, dan c masing-masing anggota {a, b, c, {a, b, c} } sehingga {a, b, c} $\subseteq$ {a, b, c, {a, b, c} }

b. Menurut soal 2.5, himpunan kosong adalah himpunan bagian semua himpunan. Jadi $\varnothing \subseteq$ A untuk semua himpunan A. Jika A = $\varnothing$, maka diperoleh relasi $\varnothing \subseteq \varnothing$

c. Himpunan $\{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ memiliki 2 buah anggota, masing-masing $\varnothing$ dan $\{\varnothing\}$. Jadi $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$ dan $\{\varnothing\} \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

d. Dari soal (c), $\varnothing \in \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, maka $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

e. Himpunan $\{\{\varnothing\}\}$ hanya memiliki sebuah anggota yaitu $\{\varnothing\}$. Jadi $\{\varnothing\} \not\subseteq \{\{\varnothing\}\}$. Yang benar adalah $\{\varnothing\} \subseteq \{\varnothing\}$ atau $\{\varnothing\} \in \{\{\varnothing\}\}$

Operasi Pada Himpunan

Soal 2.8

Diketahui $A = \{x \in R \mid -1 < x < 0\}$ dan $B = \{x \in R \mid 0 < x \le 1\}$

Tentukan himpunan

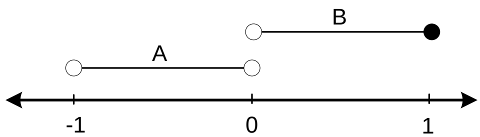
a. $A \cup B$

b. $A^c - B^c$

Penyelesaian

a. Himpunan A dan B dapat dinyatakan ada gambar 2.8. Maka

$$A \cup B = \; x \in R \mid -1 < x \leq 1 \;\; dan \;\; x \neq 0$$

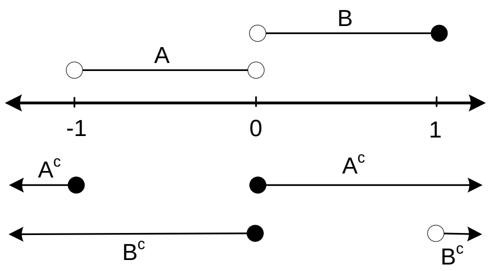


Gambar 2.8

b. Perhatikan gambar 2.9. $A^C = \; x \in R \mid x \leq -1 \;\; atau \;\; x \geq 0$ dan

$$B^C = \; x \in R \mid x \leq 0 \;\; atau \;\; x > 1$$

Maka $A^c - B^c = \; x \in R \mid 0 < x \leq 1$



Gambar 2.9

Soal 2.9

Misal semesta S = {1, 2, 3, … , 10}

A = {1, 4, 7, 10} ; B = {1, 2, 3, 4, 5} dan C = {2, 4, 6, 8}

Tentukan (A ⊕ B) - (B ⊕ C)

Penyelesaian

$A \cup B$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10 } dan $A \cap B$ = { 1, 4 }.

Maka A ⊕ B = { 2, 3, 5, 7, 10 }

$B \cup C$ = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 } dan $B \cap C$ = { 2, 4 }.

Maka B ⊕ C = { 1, 3, 5, 6, 8 }

(A ⊕ B) - (B ⊕ C) = { 2, 3, 5, 7, 10 } - { 1, 3, 5, 6, 8 } = { 2, 7, 10 }

Soal 2.10

Hitunglah $A \oplus A^c$

Penyelesaian

Menggunakan definisi operator XOR himpunan,

$$A \oplus A^c = A \cup A^c - A \cap A^c = S - \varnothing = S$$

Soal 2.11

Hitunglah :

a. $\{\varnothing\}$ - {a, b, {a, c}, $\varnothing$}

b. {a, b, {a, c}, $\varnothing$} - { {a, c} }

c. $\varnothing \oplus$ {a, $\varnothing$, {$\varnothing$} }

d. $\varnothing \cup \{\varnothing\}$

Penyelesaian

a. Ada anggota yang sama diantara himpunan $\{\varnothing\}$ dan $\{a, b, \{a, c\}, \varnothing\}$, yaitu $\varnothing$. Maka $= \{\varnothing\} - \{a, b, \{a, c\}, \varnothing\} = \{\,\}$

b. $\{a, b, \{a, c\}, \varnothing\} - \{\{a, c\}\} = \{a, b, \varnothing\}$

c. $\varnothing \oplus \{a, \varnothing, \{\varnothing\}\} = (\varnothing \cup \{a, \varnothing, \{\varnothing\}\}) - (\varnothing \cap \{a, \varnothing, \{\varnothing\}\} = \{a, \varnothing, \{\varnothing\}\} - \varnothing = \{a, \varnothing, \{\varnothing\}\}$

d. Himpunan kosong $\varnothing$ tidak memiliki anggota sehingga jika digabungkan dengan himpunan lain tidak akan memberi pengaruh. $\varnothing \cup A = A$ untuk sembarang himpunan A. Maka $\varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\}$

Soal 2.12

Diketahui $A = \{\varnothing, 1, \{1\}\}$ dan $B = \{\{\varnothing\}, \{1\}, \{\{1\}\}\}$

a. Carilah $A \cap B$

b. Apakah $\varnothing \in A \cap B$

c. Carilah $A - B$

d. Apakah $\varnothing \in A \cup B$

Penyelesaian

a. $A \cap B = \varnothing$. Perhatikan bahwa $\varnothing \neq \{\varnothing\}$ dan $1 \neq \{1\}, \{1\}$ sehingga tidak ada anggota yang sama diantara himpunan A dan B

b. Menurut jawaban (a), $A \cap B = \varnothing$ yang artinya $A \cap B$ tidak memiliki anggota sehingga $\varnothing \notin A \cap B$.

Yang benar $\varnothing \subseteq A \cap B$ karena $\varnothing$ adalah himpunan bagian dari sembarang himpunan

c. Karena tidak ada anggota yang sama diantara himpunan A dan B, maka $A - B = A = \{\varnothing, 1, \{1\}\}$

d. $A \cup B = \{\varnothing, \{\varnothing\}, 1, \{1\}, \{1, \{1\}\}\}$. Salah satu anggota $A \cup B$ adalah $\varnothing$. Jadi benar bahwa $\varnothing \in A \cup B$

Soal 2.13

a. Jika $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$ dan $B = \{\{1\}, 2\}$, carilah $P(B - A)$

b. Jika $A = \{1, \{1\}, \{2\}\}$ dan $B = \{\{1\}, 2\}$, carilah $P(A \cap B)$

c. Jika $A = \{a, b, \{a, b\}\}$ dan $B = \{a, b\}$ carilah P (A-B). Berapa jumlah anggotanya ?

Penyelesaian

a. $B - A = \{2\}$ sehingga $P(B - A) = \{\varnothing, \{2\}\}$

b. $A \cap B = \{\{1\}\}$ sehingga $P(A \cap B) = \{\varnothing, \{\{1\}\}\}$

c. $A - B = \{\{a, b\}\}$ sehingga $P(A - B) = \{\varnothing, \{\{A, B\}\}\}$

Soal 2.14

Carilah $P(\{1, \varnothing\})$

Penyelesaian

$P(\{1, \varnothing\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{\varnothing\}, \{1, \varnothing\}\}$.

Perhatikan bahwa $\varnothing \neq \{\varnothing\}$, dan Jumlah anggota $P(A) = 2^{A}$.

Soal 2.15

Jika A = {$\varnothing$, {$\varnothing$}}, apakah {$\varnothing$} $\in$ P(A) ?

Penyelesaian

P(A) = { $\varnothing$, {$\varnothing$}, {{$\varnothing$}}, {$\varnothing$, {$\varnothing$}} }.

Perhatikan bahwa $\varnothing$ (himpunan kosong) $\neq$ {$\varnothing$} (himpunan yang anggotanya himpunan kosong $\neq$ $\varnothing$ (himpunan yang anggotanya adalah himpunan yang beranggotakan himpunan kosong).

Soal 2.16

Untuk sembarang himpunan A dan B, apakah $P(A \cup B)$ = P(A) $\cup$ P(B) ? Jelaskan

Penyelesaian

Dari jumlah anggotanya saja, jelas bahwa $P(A \cup B) \neq$ P(A) $\cup$ P(B). Misalkan n(A) = k dan n(B) = p. Maka n $(A \cup B) \leq$ (k+p) = n(A) + n(B). n $(A \cup B)$ = (k+p) apabila A dan B adalah himpunan yang disjoint (tidak memiliki anggota yang sama). Akibatnya, secara umum $P(A \cup B) \neq$ P(A) $\cup$ P(B).

Sebagai contoh konkrit, misalkan A = {a} dan B = {b, c}. Maka $A \cup B$ = {a, b, c}

P(A) = {$\varnothing$, {a}}, P(B) = {$\varnothing$, {b}, {c}, {b, c}} sehingga P(A) $\cup$ P(B) = {$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {b, c}}

P($A \cup B$) = {$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c}}

Jelas tampak bahwa $P(A \cup B) \neq$ P(A) $\cup$ P(B)

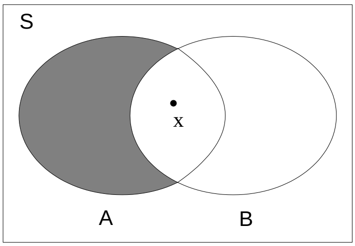
Soal 2.17

Berikut ini adalah langkah-langkah "pembuktian" pernyataan $(A - B) \cup (A \cap B) \subseteq A$. Carilah kesalahan yang dilakukan

1. Ambil sembarang $x \in (A - B) \cup (A \cap B)$
2. Jika $x \in A$, maka $x \in (A – B)$
3. Menurut definisi selisih himpunan, $x \in (A – B)$ berarti $x \in A$ dan $x \notin B$
4. Secara khusus, $x \in A$
5. Dari $x \in (A - B) \cup (A \cap B)$ dapat diturunkan $x \in A$. Berarti $(A - B) \cup (A \cap B) \subseteq A$

Penyelesaian

Kesalahan terjadi pada langkah 2. Jika $x \in A$, belum tentu $x \in (A – B)$ karena $A \not\subseteq (A - B)$. Hal ini dapat diilustrasikan pada gambar 2.10 (daerah yang gelap menyatakan himpunan A-B). Pada gambar 2.10, $x \in A$, tapi $x \notin (A – B)$



Gambar 2.10

Implikasi langkah 2 yang benar adalah :

2′. Jika $x \in (A – B)$ maka $x \in A$ (karena $A - B \subseteq A$)

Soal 2.18

Dua buah himpunan dikatakan terpisah (disjoint) jika irisan kedua himpunan tersebut = $\varnothing$. Pada sembarang himpunan, apakah kedua himpunan dibawah ini terpisah?

a. A – B dan B – A

b. A – (B $\cup$ C) dan B – (A $\cup$ C)

c. A – (B $\cap$ C) dan B – (A $\cap$ C)

Penyelesaian

Untuk mengetahui apakah 2 himpunan disjoint, kita cari hasil irisannya. Jika hasil irisannya adalah himpunan kosong, maka kedua himpunan tersebut terpisah.

a. $A - B \;\cap\; B - A$

$= \; A \cap B^c \;\cap\; B \cap A^c$ (definisi selisih himpunan)

$= \; A \cap \; B^c \cap B \;\cap A^c$ (hukum asosiatif)

$= \; A \cap \varnothing \cap A^c$

$= \; \varnothing$

Berarti (A – B) dan (B – A) merupakan himpunan yang terpisah

b. $A - \; B \cup C \;\cap\; B - \; A \cup C$

$= \; A \cap \; B \cup C \;^{C} \;\cap\; B \cap \; A \cup C \;^{C}$ (def selisih himpunan)

$= \; A \cap \; B^C \cap C^C \;\cap\; B \cap \; A^C \cap C^C$ (hukum de Morgan)

$= \; A \cap C^C \cap \; B^C \cap B \;\cap A^C \cap C^C$ (komutatif & Asosiatif)

$= \; A \cap C^C \cap \varnothing \cap A^C \cap C^C$

$= \varnothing$

Berarti A – (B$\cup$ C) dan B – (A$\cup$ C) merupakan himpunan yang terpisah

c. $A - \; B \cap C \;\; \cap \; B - \; A \cap C$

$= \;\; A \cap \; B \cap C^{\;C} \;\; \cap \; B \cap \; A \cap C^{\;C}$ (def selisih himpunan)

$= \;\; A \cap \; B^C \cup C^C \;\; \cap \; B \cap \; A^C \cup C^C$ (hukum de Morgan)

$= \;\; B \cap \; B^C \cup C^C \;\; \cap \; A \cap \; A^C \cup C^C$ (asosiatif dan komutatif)

$= \;\; B \cap B^C \; \cup \; B \cup C^C \;\; \cap \;\; A \cap A^C \; \cup \; A \cup C^C$ (distributif)

$= \;\; \varnothing \cup \; B \cup C^C \;\; \cap \;\; \varnothing \cup \; A \cup C^C$

$= \;\; B \cup C^C \; \cap \; A \cup C^C$

Secara umum, $B \cup C^C \; \cap \; A \cup C^C \; \neq \varnothing$ sehingga

A – (B$\cap$ C) dan B – (A$\cap$ C) bukan merupakan himpunan yang terpisah

Soal 2.19

Sederhanakan ekspresi himpunan berikut ini

a. $A \cap \;\; B \cup A^c \;\; \cap B^c$

b. (A$\cap$ B)$\cup$ (B-A)

Penyelesaian

a. $A \cap \;\; B \cup A^c \;\; \cap B^c \quad =$

$= \;\; A \cap B^c \;\; \cap \;\; B \cup A^c$ (hukum komutatif dan asosiatif)

= $B^c \cap A \;\cap\; B \cup A^c$ (hukum komutatif)

= $B \cap A^c\;{}^c \cap\; B \cup A^c$ (hukum de Morgan)

= $\varnothing$

b. $A \cap B \;\cup\; B - A$

= $A \cap B \;\cup\; B \cap A^c$ (definisi selisih himpunan)

= $B \cap A \;\cup\; B \cap A^c$ (hukum komutatif)

= $B \cap\; A \cup A^c$ (hukum distributif)

= $B \cap S$

= B

Soal 2.20

Jika A = {$\varnothing$, b}, apakah A $\cup$ P(A) = P(A) ? Secara umum, apakah A $\cup$ P(A) = P(A) untuk sembarang himpunan A ?

Penyelesaian

P(A) = { $\varnothing$, {$\varnothing$}, {b}, {$\varnothing$,b}} sehingga A $\cup$ P(A) = { $\varnothing$, {$\varnothing$}, b, {b}, {$\varnothing$,b}}

Secara umum, $A \in P(A)$ untuk sembarang himpunan A ($A \not\subseteq P(A)$), sehingga A $\cup$ P(A) $\neq$ P(A)

Soal 2.21

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan. Buktikan bahwa jika A $\subseteq$ B maka P(A) $\subseteq$ P(B)

Penyelesaian :

Dengan diketahuinya $A \subseteq B$, akan dibuktikan bahwa $P(A) \subseteq P(B)$

Ambil $X \in P(A)$. Harus dibuktikan bahwa $X \in P(B)$

Menurut definisi himpunan kuasa, anggota-anggota P(A) adalah semua himpunan-himpunan bagian dari A sehingga jika $X \in P(A)$, maka pastilah $X \subseteq A$

Padahal di ketahui bahwa $A \subseteq B$. Didapat $X \subseteq A \subseteq B$ atau lebih khusus lagi, $X \subseteq B$
Menurut definisi himpunan kuasa, kalau $X \subseteq B$, maka berarti bahwa $X \in P(B)$

Terbukti bahwa $X \in P(A) \Rightarrow X \in P(B)$ atau $P(A) \subseteq P(B)$

Soal 2.22

Tentukan nilai kebenaran pernyataan berikut ini (A, B, C, D sembarang himpunan). Buktikanlah pernyataan yang benar dan berilah contoh penyangkal bagi pernyataan yang salah

a. Jika $A \cap B = A \cap C$ maka $B = C$

b. Jika $A \cap B = A$, maka $A = B$

c. Jika $A \subseteq B$ dan $C \subseteq D$, maka $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

Penyelesaian

a. Salah, sebagai contoh A = {1, 2, 3}, B {2, 3, 4} dan C = {2, 3, 5}. $A \cap B = A \cap C = \{2, 3\}$, tapi $B \neq C$.

b. Salah. Sebagai contoh A = {1, 2}, B = {1, 2, 3, 4}. $A \cap B = A$, tapi $A \neq B$. Implikasi yang banr adalah : Jika $A \cap B = A$, maka $A \subseteq B$

c. Benar. Akan dibuktikan sebagai berikut :

Ambil $x \in (A \cup C)$. Akan dibuktikan bahwa $x \in (B \cup D)$.

$x \in (A \cup C)$, berarti $x \in A$ atau $x \in C$

Karena $A \subseteq B$ dan $x \in A$, maka $x \in B$

Karena $C \subseteq D$ dan $x \in C$, maka $x \in D$

Diperoleh $x \in B$ atau $x \in D$. Berarti $x \in (B \cup D)$

Terbukti bahwa jika $x \in (A \cup C)$, maka $x \in (B \cup D)$, atau $(A \cup C) \subseteq (B \cup D)$

Soal 2.23

Misalkan A dan B adalah himpunan dan S adalah himpunan semesta. Jelaskan arti pernyataan berikut ini dan tentukan nilai kebenarannya

a. $\exists A \quad \forall B \quad A \cup B = S$

b. $\forall A \quad \exists B \quad A \cup B = S$

c. $\forall A \quad \exists B \quad A \cup B = \varnothing$

d. $\forall A \quad \exists B \quad A \cap B = \varnothing$

Penyelesaian

a. Kalimat tersebut dibaca : Ada suatu himpunan A yang jika digabungkan dengan sembarang himpunan B akan menghasilkan himpunan semesta S.

Ada himpunan A yang bersifat seperti itu, yaitu himpunan semesta S (lihat sifat gabungan dengan S)

b. Kalimat tersebut dibaca : Untuk sembarang himpunan A, selalu ada himpunan B yang jika keduanya digabungkan akan menghasilkan himpunan semesta S

   Ada himpunan B yang bersifat seperti itu, yaitu B = A^c karena $A \cup A^c = S$

c. Kalimat tersebut dibaca : Untuk sembarang himpunan A, selalu ada himpunan B yang jika keduanya digabungkan akan menghasilkan himpunan $\varnothing$

   Pernyataan bernilai salah. Agar 2 gabungan 2 himpunan menghasilkan $\varnothing$, maka masing-masing himpunan tersebut haruslah $\varnothing$. Jadi jika diambil A ≠ $\varnothing$, maka $A \cup B \neq \varnothing$

d. Kalimat tersebut dibaca : Untuk sembarang himpunan A, selalu ada himpunan B yang jika keduanya diiriskan akan menghasilkan himpunan $\varnothing$

   Pernyataan bernilai benar. Ada himpunan B yang bersifat seperti itu yaitu B=$\varnothing$, atau B = A^c

Soal 2.24

Untuk sembarang himpunan A, B, C, buktikan :

a. $A - B \subseteq A$

b. Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$ maka $A \subseteq C$

c. $((A^c \cup B^c) \cap A^c)^c = A$

d. $A - (A \cap B) = A - B$

e. $A \cup (B - A) = A \cup B$

f. $A - (A - B) = A \cap B$

g. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

h. $(A - B) - C = (A - C) - B$

Penyelesaian

a. Ambil sembarang $x \in (A\text{-}B)$. Menurut definisi selisih himpunan berarti $x \in A$ dan $x \in B^c$. Secara khusus kita ambil bagian yang pertama. Jadi $x \in A$.

   Jadi untuk sembarang x, jika $x \in (A\text{-}B)$ maka $x \in A$. Ini berarti bahwa $A - B \subseteq A$

b. Ambil sembarang $x \in A$. Karena diketahui $A \subseteq B$ maka berarti $x \in B$.

   $x \in B$ adan diketahui $B \subseteq C$, maka berarti $x \in C$

   Terbukti bahwa untuk sembarang $x \in A$, maka $x \in C$ atau $A \subseteq C$

c. Untuk membuktikan kesamaan 2 himpunan, kita bisa menurunkan salah satu ruas (dengan menggunakan hukum-hukum yang berlaku pada himpuan) hingga menjadi sama dengan ruas lainnya. Cara lain adalah dengan menurunkan masing-masing ruas menjadi bentuk yang sama. Cara pertama biasanya dilakukan jika salah satu ruas memuat ekspresi yang panjang sedangkan ruas lainnya pendek. Ruas yang memuat ekspresi panjang diturunkan sehingga menjadi sama dengan ruas yang pendek.

   $((A^c \cup B^c) \cap A^c)^c = (A^c \cup B^c)^c \cup (A^c)^c$ (hukum de Morgan)

   $= (A \cap B) \cup A$ (hukum de Morgan)

   $= (A \cap B) \cup (A \cap S)$

   $= A \cap (B \cup S)$ (hukum distributif)

   $= A \cap S$

   $= A$

d. $A - (A \cap B) = A \cap (A \cap B)^c$ (definisi selisih himpunan)

$= A \cap (A^c \cup B^c)$ (hukum de Morgan)

$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)$ (hukum distributif)

$= \varnothing \cup (A \cap B^c)$

$= (A \cap B^c)$

$= A - B$ (definisi selisih himpunan)

e. $A \cup (B - A) = A \cup (B \cap A^c)$ (definisi selisih himpunan)

$= (A \cup B) \cap (A \cup A^c)$ (hukum distributif)

$= (A \cup B) \cap S$ (hukum komutatif dan asosiatif)

$= A \cup B$

f. $A - (A - B) = A - (A \cap B^c)$ (definisi selisih himpunan)

$= A \cap (A \cap B^c)^c$ (definisi selisih himpunan)

$= A \cap (A^c \cup B)$ (hukum de Morgan)

$= (A \cap A^c) \cup (A \cap B)$ (hukum distributif)

$= \varnothing \cup (A \cap B)$

$= (A \cap B)$

g. $(A - B) \cup (A \cap B)$

$= (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$ (definisi selisih himpunan)

$= A \cap (B^c \cup B)$ (hukum distributif)

$= A \cap S = A$

h. $(A - B) - C = (A \cap B^c) - C$ (definisi selisih himpunan)

$= (A \cap B^c) \cap C^c$ (definisi selisih himpunan)

$= (A \cap C^c) \cap B^c$ (hukum asosiatif dan komutatif)

$= (A - C) \cap B^c$ (definisi selisih himpunan)

$= (A - C) - B$ (definisi selisih himpunan)

SOAL TAMBAHAN

1. Apakah 4 = {4} ? Jelaskan !

2. Diketahui : A = himpunan bilangan genap

   B = {x | x = 2k untuk suatu bilangan bulat k}

   C = {x | x = 2p-1 untuk suatu bilangan bulat p}

   Apakah A = B ? ; A = C ?

3. Diketahui
   $A = \{m \in Z \mid m = 2i - 1$ utk suatu bilangan bulat positif $i\}$ dan
   $B = \{m \in Z \mid m = 2k + 1$ utk suatu bilangan bulat positif $k\}$.

   a. Nyatakan himpunan A dan B dalam dengan cara mendaftarkan anggota-anggotanya

   b. Apakah $A \subseteq B$? $B \subseteq A$?

   c. Tentukan $A \cap B$; A – B

4. Dikethui $S = \{(x, x^2) \mid x \in N\}$ dan $T = \{(x, 2x) \mid x \in N\}$ (N = bilangan asli). Carilah $S \cap T$.

5. Tentukan mana diantara pernyataan berikut ini yang benar. Berikan alasannya

   a. $3 \in \{1, 2, 3\}$

   b. $1 \subseteq \{1\}$

   c. $\{2\} \in \{1, 2\}$

   d. $\{3\} \in \{1, \{2\}, \{3\}\}$

   e. $1 \in \{1\}$

f. $\{2\} \subseteq \{1, \{2\}, \{3\}\}$

g. $\{1\} \subseteq \{1, 2\}$

h. $1 \in \{\{1\}, 2\}$

i. $\{1\} \subseteq \{1, \{2\}\}$

j. $\{1\} \subseteq \{1\}$

6. Tentukan nilai kebenaran pernyataan-pernyataan di bawah ini. Jika salah, jelaskanlah letak kesalahannya

a. $\{\emptyset\} \subseteq \{\}$

b. $\{\emptyset\} \in \{\emptyset, a, \{\emptyset, a\}\}$

c. $\{\emptyset, \{\emptyset, a\}\} \cup \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, a\}$

d. $\{\emptyset, \{\emptyset\}\} \cap \{\{\emptyset\}\} = \emptyset$

e. $\emptyset \in 2^{\{\emptyset\}}$ (2^A = himpunan kuasa himpunan A)

7. Misalkan semesta pembicaraan adalah himpunan bilangan riil R.

$A = \{x \in R \mid 0 < x \leq 2\}$; $B = \{x \in R \mid 1 \leq x < 4\}$

Tentukan :

a. $A \cap B$

b. A^c

c. B^c

d. $A^c \cap B^c$

e. $A^c \cup B^c$

8. Tentukan $\emptyset$, $\emptyset - \emptyset$. Berapa jumlah anggotanya ?

9. Jika $A = \{\varnothing, 1, \{1\}\}$ dan $B = \{\{\varnothing\}, \{1, \{1\}\}\}$, tentukan $A \cap B$

10. Tentukan $A \oplus B$, jika :

    a. $A = B$

    b. $B \subseteq A$

11. Jika A adalah sembarang himpunan dan S adalah Semesta Pembicaraan, tentukan kebenaran pernyataan berikut ini

    a. $A \oplus A = A$

    b. $A \oplus \varnothing = \varnothing$

    c. $A \oplus S = A^c$

    d. $\varnothing \oplus S = S$

12. Misalkan $A = \{1, 2\}$ dan $B = \{2, 3\}$. Carilah himpunan berikut ini

    a. $P \;\; A$

    b. $P \;\; A \cap B$

    c. $P \;\; A \cup B$

13. Diketahui $A = \quad 1, 2 \quad$ dan $B = \quad 1, 2 \quad$. Carilah :

    a. $P(A) - P(B)$

    b. $P(A) \cap P(B)$

    c. $P(A \cap B)$

14. Tentukan $P \;\; \varnothing$. Apakah $P \;\; \varnothing \;\; = \varnothing$?

    Tentukan $P \;\; P \;\; \varnothing$

    Tentukan $P \;\; P \;\; P \;\; \varnothing$

15. Tentukan kebenaran pernyataan soal berikut ini

a. $A \cap P(A) = A$

b. $\varnothing \subseteq \varnothing$

c. $P(\varnothing) = P(\{\varnothing\})$

d. $\{a, b\} \subseteq \{a, b, \{a,b\}\}$

e. $\{\{a, b\}\} \in P(\{a, b, \{a,b\}\})$

f. $\{a, b, \{a,b\}\} - \{a, b\} = \{a, b\}$

g. Jika $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$, maka $\{\{\varnothing\}\} \subseteq P(A)$

h. Jika $A \cup C = B \cup C$, maka $A = B$

16. Carilah kesalahan dalam langkah-langkah pembuktian teorema berikut ini " $(\forall A,B)\, A^c \cup B^c \subseteq (A \cup B)^c$

    Bukti " :
    <1> Ambil sembarang himpunan A dan B
    <2> Ambil sembarang $x \in A^c \cup B^c$. Maka :
    <3> $x \in A^c$ atau $x \in B^c$ (definisi gabungan himpunan)
    <4> $x \notin A$ atau $x \notin B$ (definisi komplemen)
    <5> $x \notin (A \cup B)$ (definisi gabungan himpunan)
    <6> $x \in (A \cup B)^c$ (definisi komplemen)
    <7> Kesimpulan $A^c \cup B^c \subseteq (A \cup B)^c$

17. Sederhanakan bentuk himpunan $B^C \cup (B^C \cap A^C)^C$

18. Jika A, B, dan C adalah himpunan-himpunan dengan $A \subseteq B \subseteq C$, tentukan bentuk paling sederhana dari $(C-B) \cup (B-A)$

19. Manakah diantara persamaan soal berikut ini yang benar untuk sembarang himpunan A, B, dan C ? Untuk persamaan yang salah, berilah contoh penyangkalnya !

    a. $(A - B) - C = (A - C) - B$

    b. $A - (B - C) = (A - B) - C$

    c. $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

    d. $A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$

    e. $B\text{-}A \subseteq A^c$

    f. $B\text{-}A \subseteq A$

    g. $B\text{-}A \subseteq A \cap B$

    h. $B\text{-}A \subseteq B^c$

    i. $(A \subseteq C \text{ dan } B \subseteq C) \Rightarrow (A \cup B \subseteq C)$

    j. $A^C \cup B^C \subseteq (A \cup B)^C$

    k. $(A \subseteq B \text{ dan } B \cap C = \varnothing) \Rightarrow (A \cap C = \varnothing)$

    l. $B \subseteq A^C \Rightarrow A \cap B = \varnothing$

20. Misalkan A, B, C adalah himpunan-himpunan. Tentukan kebenaran soal no 23 – 34 berikut ini. Jika benar, buktikanlah. Jika salah, berilah contoh penyangkalnya.

    a. $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

    b. Jika $A \subseteq B$ maka $A \cap C \subseteq B \cap C$

    c. Jika $A \subseteq B$ maka $A \cup C \subseteq B \cup C$

    d. Jika $A \cap C = B \cap C$ maka $A = B$

    e. Jika $A \subseteq B$ maka $B^c \subseteq A^c$

f. Jika $A \subseteq B$ dan $A \subseteq C$ maka $A \subseteq B \cap C$

g. Jika $A \not\subseteq B$ dan $B \not\subseteq C$ maka $A \not\subseteq C$

h. Jika $A \subseteq C$ dan $B \subseteq C$ maka $A \cup B \subseteq C$

i. $(A - B) \cap (B - A) = \varnothing$

j. $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

k. Jika $A \subseteq B$ maka $A \cap B^c = \varnothing$

l. Jika $A \subseteq B$ dan $B \cap C = \varnothing$ maka $A \cap C = \varnothing$

Bab 3

RELASI

3.1 Relasi Pada Himpunan

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. **Hasil kali Kartesian** A dengan B (Simbol $A \times B$) adalah himpunan semua pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Hasil Kali Kartesian tidak bersifat komutatif karena secara umum (a,b) ≠ (b,a).

Hasil Kali Kartesian beberapa himpunan A_1, A_2, ... , A_n didefinisikan sebagai

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \ldots, a_n \in A_n\}$$

Misalkan A dan B adalah himpunan-himpunan. Suatu **Relasi** (Biner) R dari A ke B adalah himpunan bagian dari $A \times B$. Jika (a, b) $\in A \times B$ dan a berelasi dengan b, dituliskan a R b. Jika a tidak berelasi dengan b dituliskan $a \not R\, b$

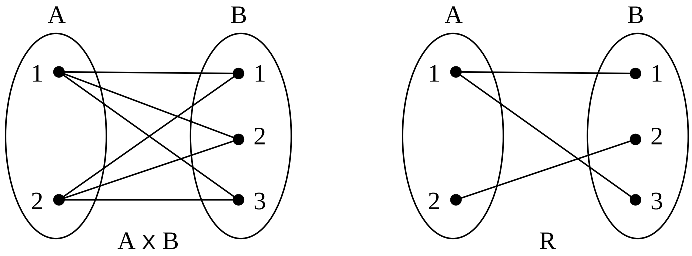
Contoh 3.1

Misalkan A = {1, 2} dan B = {1, 2, 3}.

$A \times B$ = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3)}.

Jika didefinisikan relasi R dari A ke B dengan aturan : $x \in A$ berelasi dengan $y \in B \Leftrightarrow (x\text{-}y)$ genap, maka R = { (1,1), (1,3), (2,2) }. $(1,2) \notin R$ karena (1-2) = -1 bukan bilangan genap

$A \times B$ dan R dinyatakan dalam gambar 3.1. Tampak bahwa $R \subseteq A \times B$



Gambar 3.1

Untuk mempermudah visualisasi, relasi dinyatakan dalam graf atau matriks. Dalam bentuk graf, anggota himpunan dinyatakan dengan titik, dan relasi dinyatakan dengan garis berarah yang menghubungkan 2 titik. Jika sebuah garis berelasi dengan dirinya sendiri, maka garis dalam graf disebut **loop**. Relasi hanya bisa dinyatakan dengan graf jika didefiniskan pada himpunan yang sama ($R : A \to A$).

Misalkan R adalah relasi biner dari himpunan berhingga V = {v_1, v_2, $\cdots$, v_m} ke himpunan berhingga W = {w_1 , $\cdots$, w_n}. Relasi R dapat dinyatakan dalam matriks Boolean A berordo $m \times n$ dengan elemen-elemen:

$$A\ i, j\ = \begin{cases} 1 & \text{jika } (v_i, w_j) \in R \\ 0 & \text{jika } (v_i, w_j) \notin R \end{cases}$$

Contoh 3.2

Relasi R pada contoh 3.1 dapat dinyatakan dalam matriks $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

R tidak dapat dinyatakan dalam bentuk graf karena R dinyatakan pada himpunan A ke B yang berbeda

3.2 Jenis-Jenis Relasi

Misalkan R adalah suatu relasi pada himpunan A. R disebut relasi yang :

a. **Refleksif** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A \quad x\,R\,x$

b. **Simetris** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A \quad x\,R\,y \Rightarrow y\,R\,x$

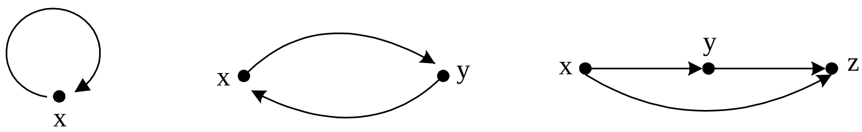
c. **Transitif** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y, z \in A \quad x\ Ry$ dan $y\ Rz \Rightarrow x\ Rz$

d. **Irrefleksif** $\Leftrightarrow$ $\forall x \in A \quad x \not R x$

e. **Asimetris** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A \quad x\ Ry \Rightarrow y \not R\ x$

f. **Antisimetris** $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in A \quad x\ Ry$ dan $y\ Rx \Rightarrow x = y$

Perhatikan bahwa relasi yang irrefleksif bukan berarti tidak refleksif. Demikian juga relasi yang asimetris. Relasi-relasi tersebut dapat diilustrasikan dalam gambar 3.2



Relasi Refleksif Relasi Simetris Relasi Transitif

Gambar 3.2

Jika relasi dinyatakan dengan gambar, ada beberapa petunjuk yang dapat diingat :

- Jika relasi refleksif, maka terdapat loop pada <u>tiap</u> titik. Sebaliknya pada relasi yang irrefleksif, <u>semua</u> titiknya tidak mempunyai loop. Jika beberapa titik mempunyai loop sedangkan beberapa titik yang lain tidak mempunyai loop, berarti relasi tersebut tidak refleksif dan tidak irrefleksif pula.

- Jika suatu relasi bersifat simetris, maka setiap garis yang menghubungkan 2 titik merupakan garis dalam 2 arah. Jadi jika ada garis dari titik x ke titik y, maka harus juga ada garis dari titik y ke titik x.

  Hal yang sebaliknya terjadi pada relasi yang asimetris. Dalam relasi asimetris, jika ada garis dari titik x ke titik y, maka tidak boleh ada garis dari titik y ke titik x.

- Jika sebagian pasangan titik dihubungkan dengan garis 2 arah dan sebagian lain dengan garis satu arah, maka relasinya tidak simetris dan tidak asimetris.

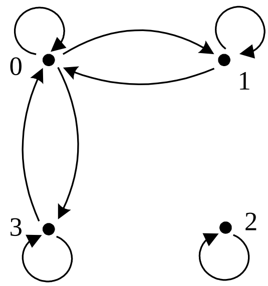
Suatu relasi disebut **Relasi Ekuivalensi** jika relasi tersebut bersifat Refleksif, Simetris, dan Transitif. Relasi ekuivalensi merupakan salah satu alat yang dipakai dalam proses abstraksi, yaitu meniadakan perbedaan yang tidak penting, dan mengambil sifat-sifat penting yang dibutuhkan. Sebagai contoh adalah pembayaran barang yang berharga Rp 100.000,- di suatu toko. Kasir tidak akan mempersoalkan apakah pembayaran dilakukan dengan 10 lembar uang Rp 10.000,- an. Sifat penting yang diperhatikan oleh kasir adalah nilai keseluruhan uang adalah Rp 10.000,-. Jadi satu lembar uang Rp 100.000 an ekuivalen dengan 10 lembar Rp 10.000 an.

Jika Relasi R yang didefinisikan pada himpunan A merupakan relasi Ekuivalensi, maka himpunan A akan terbagi menjadi kelas-kelas saling asing yang disebut **Partisi**. Sebagai contoh, relasi "lahir dalam bulan yang sama" atau “memiliki rasi bintang yang sama” akan membagi semua manusia ke dalam 12 kelas bulan yang berbeda, dimana orang-orang yang lahir dalam bulan yang sama (atau memiliki rasi bintang yang sama) berada dalam kelas yang sama pula. Kelas-kelas tersebut merupakan himpunan yang saling asing. Tidak ada seseorang yang masuk dalam 2 kelas berbeda (lahir dalam 2 bulan yang berbeda, atau memiliki 2 rasi bintang berbeda).

Contoh 3.3

Misal A = { 0, 1, 2, 3 }. Relasi R didefinisikan pada himpunan A sebagai berikut : R = {(0,0), (0,1), (0,3), (1,0), (1,1), (2,2), (3,0), (3,3)}

Relasi R dapat dinyatakan dengan gambar 3.3



Gambar 3.3

- Tampak bahwa ada loop pada tiap titik. Jadi R refleksif.
- Titik 1 memiliki loop. Berarti R tidak Irrefleksif
- Semua garis yang menghubungkan 2 titik berbeda selalu dalam 2 arah. Jadi R simetris.
- Ada sepasang titik, yaitu 0 dan 1 dimana 0 R 1 dan 1 R 0. Berarti R tidak Asimetris
- Ada garis dari titik 1 ke 0 dan dari 0 ke 3. Jika R transitif, maka seharusnya ada garis dari 1 ke 3. Tetapi karena tidak ada garis dari 1 ke 3, maka R tidak transitif.
- Ada sepasang titik, yaitu 0 dan 1 dimana 0 R 1 dan 1 R 0 dan $0 \neq 1$. Berarti R bukan relasi yang antisimetis

Untuk membuktikan tidak adanya sifat relasi tertentu, cukup dibuktikan dengan satu contoh saja.

3.3 Operasi-Operasi Pada Relasi

Karena pada hakekatnya suatu relasi merupakan suatu himpunan, maka beberapa relasi juga dapat dioperasikan dengan operasi-operasi himpunan.

Misalkan R dan S adalah 2 buah relasi dari himpunan A ke himpunan B.

$R \cup S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x,y) \in A \times B$ sedemikian hingga $(x,y) \in R$ atau $(x,y) \in S$.

$$R \cup S = \{ (x,y) \mid (x,y) \in R \ \underline{\textbf{atau}} \ (x,y) \in S \}$$

$R \cap S$ adalah himpunan semua pasangan berurutan $(x,y) \in A \times B$ sedemikian hingga $(x,y) \in R$ **dan** $(x,y) \in S$.

$$R \cap S = \{ (x,y) \mid (x,y) \in R \text{ dan } (x,y) \in S \}$$

Operasi himpunan lain seperti selisih, komplemen, dan lain-lain didefinisikan menurut definisi operasi himpunan.

Misalkan A, B dan C adalah himpunan-himpunan. $R_1 \subseteq A \times B$ dan $R_2 \subseteq B \times C$

Komposisi R_1 dan R_2 (simbol $R_1 \bullet R_2$) adalah relasi yang elemen pertamanya adalah elemen pertama R_1 dan elemen keduanya adalah elemen kedua R_2.

$$R_1 \bullet R_2 = \{ (x,z) \mid (x,y) \in R_1 \text{ dan } (y,z) \in R_2 \}$$

Jika $R_1 = R_2 = R$, maka $R_1 \bullet R_2 = R \bullet R = R^2$. Secara umum, simbol R^k dipakai untuk menyatakan bahwa relasi R dikomposisikan dengan dirinya sendiri sebanyak k kali.

$R^1 = R$ dan $R^k = R^{k-1} \bullet R$, untuk $k \geq 1$.

Tutupan Transitif (simbol $\mathbf{R^+}$) relasi R adalah gabungan dari semua R^k, $(k \geq 1)$

$$R^{+} = R \cup R^{2} \cup R^{3} \cup \cdots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{k}$$

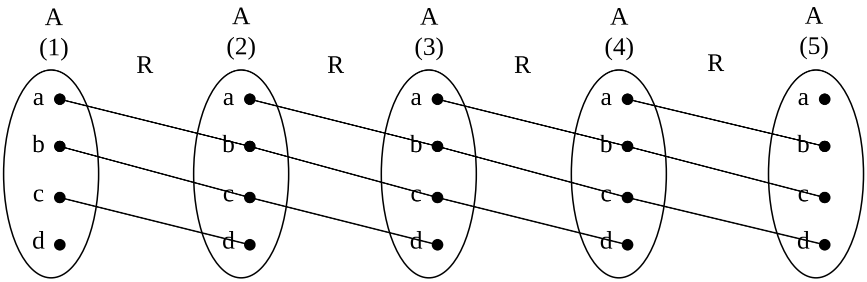
Tutupan Transitif relasi R didapat dengan cara menambahkan semua relasi yang bersifat transitif pada relasi R mula-mula. Tutupan transitif suatu relasi R merupakan relasi transitif terkecil yang memuat R.

Tutupan Transitif Refleksif (simbol $\mathbf{R^{*}}$) adalah Tutupan Transitif yang bersifat Refleksif. Tutupan transitif refleksif didapat dengan cara menggabungkan tutupan transitif dengan semua elemen yang berelasi dengan dirinya sendiri.

$$R^{*} = R^{+} \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$$

Contoh 3.4

Misalkan A = {a, b, c, d} dan $R \subseteq A \times A$ adalah R = { (a,b), (b,c), (c,d) }. Untuk mencari R^k, R dapat digambarkan secara serial seperti gambar 3.4. R^2 didapat dengan mencari relasi dari himpunan A(1) langsung ke A(3). R^3 didapat dengan mencari relasi dari himpunan A(1) langsung ke A(4), dan seterusnya.



Gambar 3.4

Diperoleh $R^2 = R \bullet R = \{ (a,c), (b,d) \}$

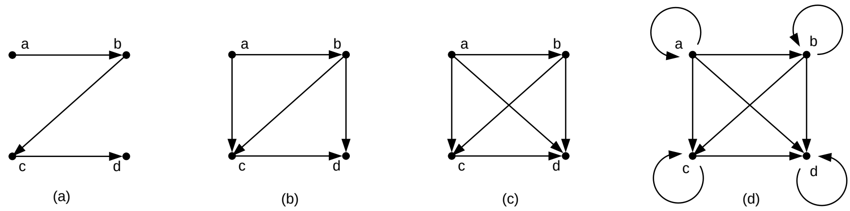
$R^3 = R^2 \bullet R = \{ (a,d) \}$

$R^4 = R^3 \bullet R = \{ \}$

Jadi $R^k = \{\ \}$ untuk $k \geq 4$.

Maka $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots = \{(a,b), (b,c), (c,d), (a,c), (b,d), (a,d)\}$

Jika menggunakan graf, proses mencari R^+ dilakukan dengan menambah graf relasi R dengan garis yang bisa didapat dengan sifat transitif. Gambar 3.5(a) adalah graf relasi R mula-mula. Gambar 3.5(b) adalah $R \cup R^2$. R^2 berisi garis baru yang didapat dari sifat transitif gambar 3.5(a). Gambar 3.5(c) adalah R^+ yang merupakan $R \cup R^2 \cup R^3$



Gambar 3.5

$R^* = R^+ \cup \{ (a,a) \mid a \in A \}$

$= R^+ \cup \{ (a,a), (b,b), (c,c), (d,d) \}$

$= \{ (a,b), (b,c),(c,d), (a,c), (b,d), (a,d), (a,a), (b,b), (c,c), (d,d) \}$

Gambar 3.5 (d) adalah R* yang diperoleh dari gambar 3.5 (c) ditambah dengan loop di setiap titiknya

3.4 Relasi Partial Order

Misalkan R adalah relasi biner yang didefinisikan pada himpunan A.

R disebut relasi **Partial Order** bila dan hanya bila R refleksif, antisimetris dan transitif. Himpunan A bersama dengan relasi partial order $\leq$ disebut **Partially Order Set** (Poset).

Partial Order membagi anggota-anggota himpunan menjadi tingkatan-tingkatan. Sebagai contoh adalah himpunan mata kuliah di suatu perguruan tinggi, beserta relasi prasyarat pengambilan. Dengan adanya prasyarat, matakuliah-matakuliah akan terbagi menjadi tingkatan-tingkatan, satu di atas yang lain. Mahasiswa mulai mengambil mata kuliah dari tingkatan yang paling rendah, dan selanjutnya menaik hingga tingkat yang paling tinggi.

Contoh 3.5

Misal A = {a, b, c} dan P(A) adalah himunan kuasa himpunan A. Relasi "himpunan bagian ($\subseteq$)" yang didefinisikan pada P(A) dengan aturan $\forall U,V \in P\ A \quad U\ R\ V \quad \Leftrightarrow\ U \subseteq V$ merupakan relasi relasi Partial Order. Hal ini dapat dibuktikan sebagai berikut :

Jika A = {a, b, c} maka P(A) = { $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c} }

- Relasi R Refleksif :

  Ambil sembarang himpunan U $\in$ P(A). Menurut teori himpunan, suatu himpunan adalah himpunan bagian dari dirinya sendiri. Jadi U $\subseteq$ U. Terbukti bahwa relasi R bersifat refleksif.

- Relasi R Antisimetris :

  Ambil sembarang 2 himpunan U,V $\in$ P(A) sedemikian hingga U $\subseteq$ V dan V $\subseteq$ U. Menurut teori himpunan, apabila U $\subseteq$ V dan V $\subseteq$ U, maka berarti bahwa U = V. Terbukti bahwa R adalah relasi yang Antisimetris.

- Relasi R Transitif :

  Ambil sembarang 3 himpunan U,V,W $\in$ PA) sedemikian hingga U $\subseteq$ V dan V $\subseteq$ W. Menurut teori himpunan :

  $U \subseteq V$ berarti $\forall x \;\; x \in U \Rightarrow x \in V$ dan

  $V \subseteq W$ berarti $\forall x \;\; x \in V \Rightarrow x \in W$

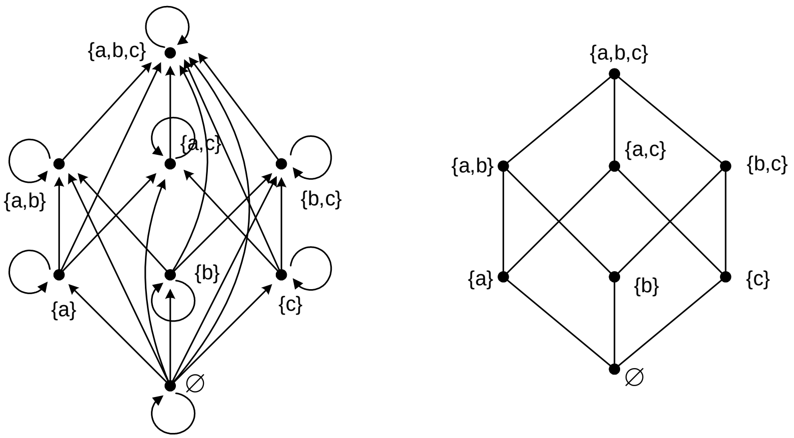
Dari kedua implikasi tersebut dapat disimpulkan $\forall x \;\; x \in U \Rightarrow x \in W$. Ini berarti U$\subseteq$W. Terbukti bahwa R adalah relasi yang transitif.

Diagram yang lebih sederhana untuk menggambarkan relasi partial order adalah **diagram Hasse**. Untuk menggambar diagram Hasse, mula-mula relasi digambarkan dalam graf berarah yang semua garisnya mengarah ke atas. Berikutnya, hapuslah :

- Loop pada tiap titik.
- Panah yang keberadaannya bisa diimplikasikan dengan sifat transitif.
- Penunjuk panah (sehingga menjadi graf tak berarah).

Contoh 3.6

Relasi R pada contoh 3.5 dapat dinyatakan dengan graf pada gambar 3.6(a). Gambar 3.6(b) adalah diagram Hassenya yang tampak jauh lebih sederhana dan mudah dilihat.



(a) (b)

Gambar 3.6

Jika 2 elemen dalam Poset berelasi, maka elemen-elemen tersebut dikatakan **Komparabel** (dapat dibandingkan). Sebaliknya, jika 2 elemen tidak dapat dibandingkan, maka keduanya disebut **non-komparabel** (tidak dapat dibandingkan) Jika semua elemen dalam relasi partial order dapat dibandingkan, maka relasi tersebut dinamakan Total Order. Pada gambar 3.6, elemen {a} dan {b} adalah elemen yang non-komparabel. Elemen {a} dan {a,b,c} adalah elemen yang komparabel.

Misalkan $(A,\leq)$ adalah Poset (Partially Ordered Set)

1. Suatu elemen $a \in A$ disebut **Elemen Maksimal** bila dan hanya bila a lebih besar atau sama dengan (dalam diagram Hasse, letaknya lebih atas) semua elemen yang komparabel dengan a

   $a \in A$ adalah elemen maksimal $\Leftrightarrow$ $(\forall\, b \in A)\ b \leq a$ atau a dan b non-komparabel.

2. Suatu elemen $a \in A$ disebut **Elemen Terbesar (Greatest)** dalam A bila dan hanya bila a lebih besar atau sama dengan semua elemen dalam A.

   $a \in A$ adalah elemen terbesar $\Leftrightarrow$ $(\forall\, b \in A)\ b \leq a$

3. Suatu elemen $a \in A$ disebut **Elemen Minimal** bila dan hanya bila a lebih kecil atau sama dengan semua elemen yang komparabel dengannya.

   $a \in A$ adalah elemen minimal $\Leftrightarrow$ $(\forall\, b \in A)\ a \leq b$ atau a dan b non-komparabel.

4. Suatu elemen $a \in A$ adalah **Elemen Terkecil (Least)** dalam A bila dan hanya bila a lebih kecil atau sama dengan semua elemen A.

   $a \in A$ adalah elemen terkecil $\Leftrightarrow$ $(\forall\, b \in A)\ a \leq b$

Jika relasi dinyatakan dalam bentuk diagram Hasse, suatu elemen disebut maksimal jika tidak ada elemen lain yang lebih tinggi, dan disebut eemen minimal jika tidak ada elemen lain yang lebih rendah. Elemen terbesar adalah elemen yang tertinggi dibandingkan semua elemen, dan elemen terendah adalah elemen yang terbawah dibandingkan semua elemen. Elemen maksimal dan minimal selalu ada, tetapi elemen terbesar dan terkecil belum tentu ada

Misalkan a, b adalah 2 elemen anggota Poset $(A, \leq)$. Elemen $c \in A$ disebut **batas atas** dari a dan b bila dan hanya bila $a \leq c$ dan $b \leq c$.

Elemen $c \in A$ disebut **batas atas terkecil (Least Upper Bound = LUB)** dari a dan b bila dan hanya bila :

1. c adalah batas atas a dan b.

2. Jika d adalah batas atas a dan b yang lain maka $c \leq d$.

Secara analog, elemen $c \in A$ disebut **batas bawah** dari a dan b bila dan hanya bila $c \leq a$ dan $c \leq b$.

Elemen $c \in A$ disebut **batas bawah terbesar (Greatest Lower Bound = GLB)** dari a dan b bila dan hanya bila :

1. c adalah batas bawah a dan b.

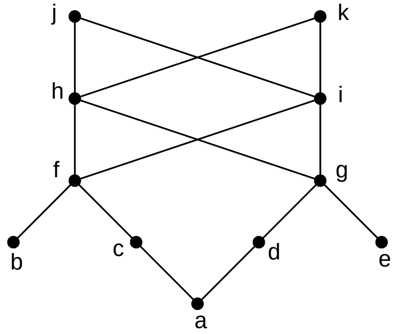
2. Jika d adalah batas bawah a dan b yang lainnya, maka $d \leq c$.

Dalam suatu Poset, LUB tidaklah selalu ada. Akan tetapi jika LUB ada, LUB tersebut tunggal. Hal yang sama juga berlaku pada GLB. Suatu Poset disebut **Lattice** apabila setiap 2 elemen dalam himpunannya mempunyai GLB dan LUB.

Konsep LUB dan GLB sebenarnya sudah diajarkan pada anak Sekolah Dasar ketika mempelajari KPK (Kelipatan Persekutuan Terkecil) dan FPB (Faktor Persekutuan Terbesar). KPK dan FPB sebenarnya adalah LUB dan GLB yang dikenakan pada himpunan bilangan asli pada relasi perkalian

Contoh 3.7

Poset yang dinyatakan dengan diagram Hasse gambar 3.7 memiliki elemen maksimal titik j dan k. Elemen terbesarnya tidak ada karena j dan k tidak dapat dibandingkan. Elemen minimalnya titik b, a, dan e. Elemen terkecilnya tidak ada karena b, a, dan e tidak dapat dibandingkan.



Gambar 3.7

Batas atas dari f dan g adalah titik h, i, j, dan k. Elemen j dan k bukan LUB (f,g) karena h ≤ j dan h ≤ k. Karena h dan i tidak dapat dibandingkan, maka LUB (f, g) tidak ada.

Batas bawah f dan g adalah titik a. Titik b bukanlah batas bawah f dan g, karena meskipun $b \leq f$, tetapi $b \not\leq g$. Hal yang serupa terjadi pada titik c, d dan e. GLB (f, g) = a

Poset gambar 3.7 bukan Lattice karena banyak pasangan elemen tidak memiliki GLB atau LUB seperti pasangan elemen (b, c), (b, d), (d, e) tidak memiliki GLB. Pasangan (j, k), (h, i) tidak memiliki LUB

SOAL DAN PENYELESAIANNYA

Relasi Pada Himpunan

Soal 3.1

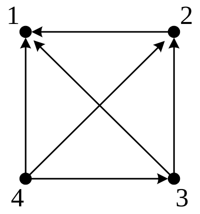
Misalkan X = {1, 2, 3, 4}. Suatu relasi R yang didefinisikan pada himpunan X adalah sebagai berikut : R = { (x,y) | x > y }. Nyatakan R dengan matriks dan Graf.

Penyelesaian :

Anggota-anggota R adalah pasangan berurutan (x,y) sedemikian hingga x > y. R = {(2,1), (3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (4,3)}

Dalam bentuk matriks, $R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

R dapat dinyatakan dengan graf gambar 3.8

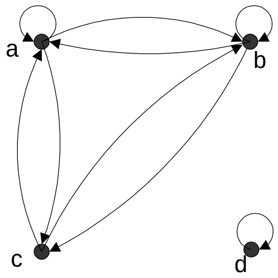


Gambar 3.8

Jenis-Jenis Relasi

Soal 3.2

Apakah relasi R yang didefinisikan pada A = {a, b, c, d} dan digambarkan dengan graf berarah gambar 3.9 bersifat refleksif ? simetris ? Transitif ?



Gambar 3.9

Penyelesaian

R tidak refleksif karena tidak ada loop di titik c.

R simetris karena setiap garisnya berpasangan. Supaya R simetris, tidak diharuskan memiliki garis untuk tiap pasang titik berbeda. Tapi kalau ada garis yang menghubungkan sepasang titik berbeda, garis tersebut harus berpasangan.

R tidak transitif karena cRa dan aRc, tetapi c $\not R$ c

Soal 3.3

Misalkan A adalah himpunan manusia di bumi Relasi R didefinisikan pada A dengan aturan : $\forall a, b \in A \quad a\,R\,b \Leftrightarrow a$ dan b mempunyai ibu yang sama.

- Apakah R Refleksif ?
- Apakah R Simetris ?
- Apakah R Transitif ?

Penyelesaian

- R jelas refleksif karena ibu seseorang adalah tunggal.

- Ambil sembarang 2 anggota A (a dan b). Jika aRb (berarti a dan b mempunyai ibu yang sama), maka pastilah b dan a mempunyai ibu yang sama (atau bRa). Jadi R simetris.
- Ambil sembarang 3 anggota A (a, b, c). aRb berarti a dan b mempunyai ibu yang sama. bRc berarti b dan c mempunyai ibu yang sama. Karena ibu seseorang tunggal, berarti ibu dari a,b, c sama. Secara khusus, pastilah a dan c juga mempunyai ibu yang sama. Terbukti kebenaran implikasi aRb dan bRc $\Rightarrow$ aRc, atau R transitif.

Soal 3.4

Misalkan R adalah relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positip dengan aturan sbb : aR b $\Leftrightarrow$ (a-b) adalah bilangan bulat positip ganjil.

- Apakah R Refleksif ?
- Apakah R Transitif ?

Penyelesaian

- R refleksif berarti untuk tiap bilangan bulat positip a, aRa atau (a-a)=0 adalah bilangan ganjil. Pernyataan ini jelas salah karena 0 bukan bilangan ganjil. Jadi R tidak refleksif
- R tidak transitif. Sebagai contoh penyangkal, ambil a=7, b=4, c=3. aRb karena (7-4)=3 ganjil. bRc karena (4-3)=1 ganjil. Tapi a $\not R$ c karena (7-3)=4 tidak ganjil

Soal 3.5

Relasi berikut ini didefinisikan atas bilangan bulat Z. Berilah contoh penyangkal untuk menunjukkan bahwa relasi R tidak transitif ?

a. m R n $\Leftrightarrow$ m.n = 0

b. m R n $\Leftrightarrow$ $m^2 + n^2 = 2$

c. $m\,R\,n \Leftrightarrow m\,n = \text{genap}$

d. $m\,R\,n \Leftrightarrow m + n = 0$

Penyelesaian

a. Ambil m=2, n=0 dan p=3. mRn (karena m.n = 2.0 = 0), dan nRp (karena n.p = 0.3 = 0), tapi m $\not R$ p karena m.p = 2.3 = 6 ≠0

b. Sebagai contoh penyangkal, ambil m=0, n= $\sqrt{2}$ dan p=0. mRn karena $m^2+n^2 = 0^2 + \sqrt{2}^2 = 2$. nRp karena $n^2+p^2 = \sqrt{2}^2 + 0^2 = 2$. Tetapi m $\not R$ p karena $m^2+p^2 = 0^2+0^2 = 0 \neq 2$

c. Sebagai contoh penyangkal, ambil m=3, n=2, p=5. mRn karena m.n=3.2=6 (genap) dan nRp karena n.p=2.5=10 (genap). Tapi m $\not R$ p karena m.p=3.5=15 tidak genap

d. Sebagai contoh penyangkal, ambil m=-3, n=3, p=-3. mRn karena m+n=-3+3=0 dan nRp karena n+p=3+(-3)=0. Tapi m $\not R$ p karena m+p=-3+(-3)=-6≠0

Soal 3.6

Diketahui A = {1, 2, 3, 4, 5, 6 }. Relasi R didefiniskan pada A dengan aturan sbb : a R b $\Leftrightarrow$ KPK (a, b) = 4

a. Apakah (4, 6) $\in$ R ? (2, 4) $\in$ R ? (2, 6) $\in$ R ?

b. Apakah R Refleksif ? Simetris ? Transitif ? Irrefleksif ?

Penyelesaian

a. KPK (4, 6) = 12 sehingga (4,6) $\notin$ R

KPK (2, 4) = 4 sehingga (2, 4) $\in$ R

KPK (2, 6) = 6 sehingga (2, 6) $\notin$ R

b. R tidak refleksif karena ada anggot A yang tidak berelasi dengan dirinya sendiri. Sebagai contoh, $3 \not R\, 3$ karena KPK(3,3)≠4

R simetris karena fungsi KPK bersifat simetris. KPK (a,b) = KPK (b,a) sehingga jika KPK (a,b) = 4, maka KPK (b,a) = 4 juga

R tidak transitif. 1R4 (karena KPK(1,4) = 4) dan 4R2 (karena KPK(4,2) = 4), tetapi $1 \not R\, 2$ (karena KPK (1,2)≠4

R tidak irrefleksif karena ada anggota A yatu 4 yang berelasi dengan dirinya sendiri. 4R4 karena KPK(4,4) = 4

Soal 3.7

Misal X = { a, b, c }. Manakah diantara relasi yang didefinisikan atas P(X) berikut ini yang bersifat asimetris

a. $A\,R\,B \Leftrightarrow$ jumlah anggota A = jumlah anggota B

b. $A\,R\,B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

c. $A\,R\,B \Leftrightarrow$ A = B^c (B^c = komplemen B)

d. $A\,R\,B \Leftrightarrow$ n(A) > n(B) (n(A) = jumlah anggota A)

Penyelesaian

Jika X = {a,b,c,d} maka P(X) = { $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c} }

R asimetris $\Leftrightarrow \forall A, B \in P(X)\;\; A R B \Rightarrow B \not R A$

R tidak asimetris $\Leftrightarrow \exists A, B \in P(X)\;\; A R B \;\; dan \;\; B\,R\,A$

a. Tidak asimetris. Ambil 2 anggota P(X) : A={a} dan B={c}. ARB (jumlah anggota A = B), dan BRA (jumlah anggota B = A)

b. Tidak asimetris. Ambil 2 anggota P(X) : A={a} dan B={c}. ARB ($A \cap B = \varnothing$), dan BRA ($B \cap A = \varnothing$)

c. Tidak Asimetris. Ambil sembarang A,B $\in$ P(X) sedemikian hingga A=B^c. Menurut teori himpunan, A=B^c, berarti A^c = (B^c)^c=B atau B=A^c. Jadi ada (bahkan untuk semua) anggota P(X), ARB (A=B^c) dan BRA (B=A^c). Karena semua anggota P(X) bersifat demikian, maka R tidak asimetris tapi R simetris.

d. Asimetris. Ambil sembarang A,B $\in$ P(X) sedemikian hingga ARB (berarti n(A) > n(B)). Karena n(A) dan n(B) adalah bilangan cacah, jika n(A) > n(B), pastilah n(B) ≤ n(A) atau B $\not R$ A.

Jadi implikasi $\forall A, B \in P(X)\ ARB \Rightarrow B \not R A$ bernilai benar, atau R adalah relasi asimetris

Soal 3.8

Misalkan R adalah relasi yang didefinisikan atas himpunan A. Mana diantara pernyataan berikut ini yang benar ?

a. Jika R refleksif, maka R irrefleksif

b. Jika R irrefleksif, maka R refleksif

c. Jika R tidak refleksif, maka R irrefleksif

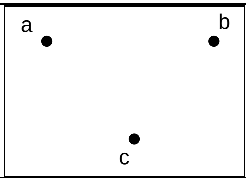
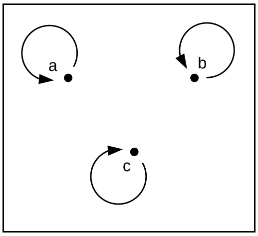
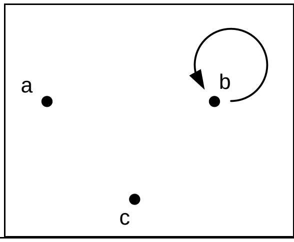
d. Jika R irrefleksif, maka R tidak refleksif

Penyelesaian

Hubungan antara relasi refleksif dan irrefleksif dapat dilihat pada tabel 3.1

Tabel 3.1

	Refleksif	**Tidak Refleksif**
Irrefleksif	R refleksif sekaligus Irrefleksif • Tidak mungkin terjadi	R tidak refleksif tapi Irrefleksif

		
Tidak Irrefleksif	R refleksif tapi tidak Irrefleksif 	R tidak refleksif dan tidak Irrefleksif 

a. Pernyataan salah. Jika R refleksif, maka semua titiknya memiliki loop. Jadi R tidak mungkin irrefleksif.

b. Pernyataan salah. Jika R irrefleksif, maka tidak ada titik yang memiliki loop. Jadi R tidak mungkin refleksif

c. Pernyataan salah. R tidak refleksif berarti ada (tidak harus semua) titik dalam A yang tidak memiliki loop (sebagian lainnya memiliki loop). Ini tidak berarti irrefleksif. Perhatikan tabel 3.1 kolom tidak refleksif. Jika R tidak refleksif, R bisa irrefleksif, tapi R bisa juga tidak irrefleksif

d. Pernyataan benar. R irrefleksif berarti tidak ada loop. Jika demikian, maka R tidak refleksif. Perhatikan tabel 3.1 pada baris irrefleksif. Jika R irrefleksif, maka satu-satunya kemungkinan adalah R tidak refleksif

Soal 3.9

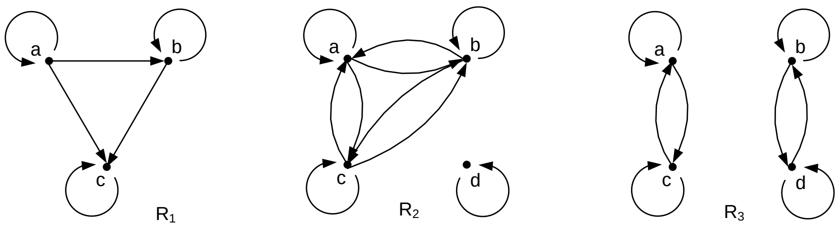
Relasi R_1 , R_2 , R_3 dinyatakan dengan graf yang matriks adjacencynya sebagai berikut :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad R_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mana diantara ketiga relasi tersebut yang merupakan relasi ekuivalensi ?

Penyelesaian

Graf relasi R_1, R_2, R_3 tampak pada gambar 3.10 . Jumlah titik dalam graf sama dengan jumlah baris/kolom matriks. Label titik a, b, … diurutkan sesuai baris matriks



Gambar 3.10

Dari graf, tampak bahwa :

- R_1 refleksif dan transitif tapi tidak simetris karena ada garis yang tidak berpasangan (misal garis a-b). Maka R_1 bukan relasi ekuivalensi
- R_2 ekuivalensi karena memenuhi semua syarat. Tampak bahwa himpunan terpisah menjadi 2 bagian yaitu {a,b,c} dan {d}. Pada matriks juga kelihatan bahwa elemen 1 terkumpul di 3 baris/kolom teratas. Elemen inilah yang membentuk {a,b,c}
- R_3 ekuivalensi karena memenuhi semua syarat. Tampak bahwa himpunan terpisah menjadi 2 bagian yaitu {a,c} dan {b,d}. Pada matriks, pemisahan ini tidak terlalu kelihatan. Tapi jika kita menukar baris 2 dan 3, maka tampak bahwa elemen 1 terpisah menjadi 2 kelompok.

Soal 3.10

Misalkan A = {1, 2, 3} dan B = A $\times$ A. Relasi R didefinisikan pada B dengan aturan sebagai berikut :

$$\forall\ a,b\ ,\ c,d\ \in B \quad (a,b)\ R\ (c,d) \iff a+d = b+c$$

a. Tuliskan anggota B

b. Tunjukkan bahwa R adalah relasi ekuivalensi

Penyelesaian

a. B = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) }

b. R Refleksif :
Ambil sembarang (a,b) $\in$ B.
(a,b)R(a,b) karena a+b = b+a. Terbukti R refleksif

R simetris :
Ambil sembarang (a,b), (c,d) $\in$ B.
(a,b)R(c,d) berarti a+d = b+c. Karena a,b,c,d adalah bilangan bulat $\in$ A, maka berlakulah sifat komutatif. Maka c+b = d+a. Ini berarti (c,d)R(a,b). Dari (a,b)R(c,d) diperoleh (c,d)R(a,b). Berarti R simetris

R transitif :
Ambil sembarang (a,b), (c,d), (e,f) $\in$ B.
(a,b)R(c,d) berarti a+d = b+c. (c,d)R(e,f) berarti c+f = d+e. Jika kedua persamaan dijumlahkan, diperoleh a+d+c+f = b+c+d+e yang jika disederhanakan menjadi a+f = b+e. Persamaan terakhir berarti (a,b)R(e,f). Terbukti R transitif

Soal 3.11

Mana diantara relasi yang didefinisikan atas bilangan asli berikut ini yang merupakan relasi ekuivalensi

a. $mRn \Leftrightarrow$ m + n genap

b. $mRn \Leftrightarrow$ m + n ganjil

c. $mRn \Leftrightarrow$ m.n genap

d. $mRn \Leftrightarrow$ n = 2m

Penyelesaian

a. mRm karena m+m = 2m yang merupakan bilangan genap, sehingga R Refleksif.

   Penjumlahan 2 bilangan bersifat komutatif. m+n = n+m. Jika m+n genap (mRn), maka pastilah n+m genap juga (nRm), sehingga R bersifat simetris.

   Menurut teori bilangan, jumlah 2 buah bilangan akan genap jika kedua bilangan penyusunnya genap semua atau ganjil semua. Jika mRn (m+n genap), maka m dan n keduanya ganjil semua atau genap semua. Jika nRp (n+p genap), maka n dan p keduanya ganjil semua atau genap semua. Jika kedua pernyataan ini digabungkan (mRn dan nRp), maka m, n, dan p ketiganya ganjil semua atau genap semua. Jika demikian maka m+p akan genap, atau mRp. Berarti R bersifat Transitif.

   Karena memenuhi semua syarat, maka R adalah relasi Ekuivalensi. Kelas yang terbentuk adalah himpunan bilangan ganjil dan himpunan bilangan genap

b. Bukan ekuivalensi karena tidak refleksif dan tidak transitif.

   $1 \not R 1$ karena 1+1 =2 bukan bilangan ganjil sehingga R tidak refleksif.

   Ambil m=2, n=3, p=4. mRn (karena 2+3=5 bilangan ganjil) dan nRp (karena 3+4=7 bilangan ganjil) tetapi $m \not R p$ karena 2+4=6 bukan bilangan ganjil, sehingga R tidak transitif

c. Bukan ekuivalensi karena tidak refleksif dan tidak transitif.

$1 \not R 1$ karena 1.1 =1 bukan bilangan genap sehingga R tidak refleksif.

Ambil m=3, n=2, p=5. mRn (karena 3.2=6 bilangan genap) dan nRp (2.5=10 adalah bilangan genap) tetapi $m \not R p$ karena 3.5=15 bukan bilangan genap sehingga R tidak transitif

d. Bukan ekuivalensi karena tidak satupun syarat relasi ekuivalensi yang dipenuhi.

$3 \not R 3$ (karena 3≠2(3)) sehingga R tidak refleksif.

3R6 (karena 6 = 2(3)), tapi $6 \not R 3$ (karena 3≠2(6)) sehingga R tidak simetris.

3R6 (karena 6=2(3)) dan 6R12 (karena 12=2(6)), tapi $3 \not R 12$ sehingga R tidak transitif

Soal 3.12

Relasi R didefinisikan pada A = {a, b, c, d}.

R = { (a,a), (a,d), (b,b), (b,c), (c,b), (c,c), (d,a), (d,d) }. Manakah kelas-kelasnya ?

Penyelesaian

Kelas bisa dicari secara langsung dari anggota relasi atau berdasarkan graf

- Berdasarkan anggota Relasi.

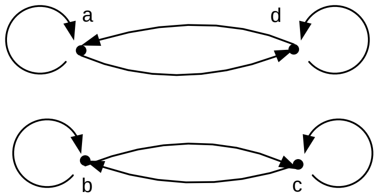
  Cari semua anggota relasi R yang memuat elemen a. Didapat (a,a), (a,d), (d,a). Semua anggota R ini hanya memuat elemen a dan d. Berarti kelas yang terbentuk adalah {a,d}.

  Proses yang sama dilakukan untuk elemen b. Didapat (b,b), (b,c), (c,b), (c,c) . Kelas yang terbentuk adalah {b,c}

Karena semua anggota A sudah terambil, proses dihentikan. A memiliki 2 kelas saling asing, yaitu {a,d} dan {b,c}

- Berdasarkan graf.

  Gambar 3.11 adalah graf relasi R. Tampak bahwa A terpisah menjadi 2 kelompok/kelas saling asing, yaitu {a,d} dan {b,c}



Gambar 3.11

Soal 3.13

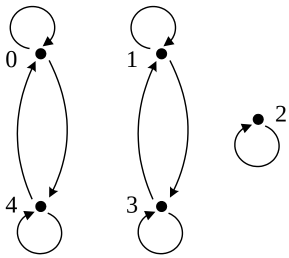
Misalkan A = {0, 1, 2, 3, 4}. Relasi R pada A didefinisikan sebagai berikut : R = { (0,0), (0,4), (1,1), (1,3), (2,2), (4,0), (3,3), (3,1), (4,4) }.

a. Tunjukkan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi.

b. Carilah semua kelas-kelas ekuivalensi R.

Penyelesaian :

Relasi R dapat digambarkan dengan graf pada gambar 3.12



Gambar 3.12

a. Akan ditunjukkan bahwa R merupakan relasi ekuivalensi.

- Refleksif.
  R refleksif karena semua elemen dalam A berelasi dengan dirinya sendiri, yang ditunjukkan dengan adanya loop pada tiap elemen tersebut.
- Simetris.
  Tampak bahwa semua garis yang menghubungkan 2 titik berbeda selalu berpasangan (misalnya 0 dan 4 ; 1 dan 3). Jadi R simetris.
- Transitif.
  Dengan melihat pada semua kemungkinan dalam R, apabila x R y dan y R z, maka x R z. Jadi R transitif.

b. $[0] = \{x \in A \mid x\,R\,0\}$ atau $\{x \in A \mid (x,0) \in R\} = \{0, 4\}$

$[1] = \{x \in A \mid x\,R\,1\} = \{1, 3\}$

$[2] = \{x \in A \mid x\,R\,2\} = \{2\}$

$[3] = \{x \in A \mid x\,R\,3\} = \{1, 3\}$

$[4] = \{x \in A \mid x\,R\,4\} = \{0, 4\}$

Terlihat bahwa [0] = [4] dan [1] = [3], sehingga kelas-kelas ekuivalen yang berbeda dalam R adalah {0, 4}, {1, 3} dan {2}. Dilihat dari grafnya, kelas ekuivalensi merupakan bagian-bagian yang terpisah.

Soal 3.14

Misalkan himpunan semesta A adalah semua mahasiswa di suatu universitas. Untuk tiap xRy yang didefinisikan berikut ini, mana yang merupakan Relasi Ekuivalensi ? Untuk relasi yang Ekuivalensi, jelaskanlah kelas yang terbentuk.

a. x kuliah di fakultas yang sama dengan y

b. x masuk pada tahun/angkatan yang sama dengan y

c. x berasal dari propinsi yang sama dengan y

d. x kenal dengan y

e. x lebih tinggi dari y

Penyelesaian

a. Relasi ekuivalensi. Sebuah kelas adalah himpunan mahasiswa dalam satu fakultas.

b. Relasi ekuivalensi. Kelasnya adalah himpunan mahasiswa dalam satu angkatan

c. Relasi ekuivalensi. Kelasnya adalah himpunan mahasiswa-mahasiswa yang berasal dari sebuah propinsi yang sama. Jika mahasiswa tersebar dari seluruh propinsi yang ada di Indonesia, maka terdapat 33 kelas (jumlah propinsi di Indonesia)

d. Bukan relasi ekuivalensi karena tidak transitif. Jika x kenal y dan y kenal z, belum tentu x kenal z.

e. Bukan relasi ekuivalensi karena tidak refleksif dan tidak simetris. Seorang mahasiswa tidak mungkin lebih tinggi dari dirinya sendiri sehingga tidak refleksif. Jika x lebih tinggi dari y, pastilah y tidak lebih tinggi dari x. Jadi tidak simetris.

Soal 3.15

Misal A = {2, 4, 8}. Relasi R didefinisikan atas AxA dengan aturan sebagai berikut : (a,b) R (c,d) $\Leftrightarrow$ ad = bc

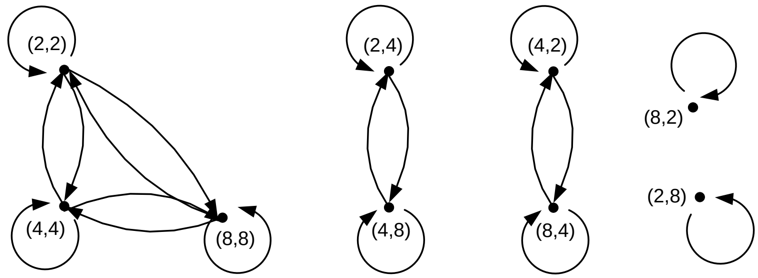
a. Gambarkan graf berarah relasi R

b. Tunjukkan kelas-kelasnya

Penyelesaian

$A \times A$ = { (2,2), (2,4), (2,8), (4,2), (4,4), (4,8), (8,2), (8,4), (8,8) }

Graf relasi tampak pada gambar 3.13 . Ada 4 kelas yang terbentuk, yaitu {(2,2), (4,4), (8,8)}, {(2,4), (4,8)}, {(4,2), (8,4)}, {(8,2)} dan {(2,8)}



Gambar 3.13

Soal 3.16

Misalkan A = { (1, 3), (2, 4), (-4, -8), (3, 9), (1, 5), (3, 6) }. Didefinisikan relasi biner R pada A sbb :

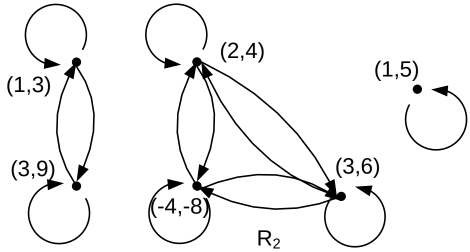
Untuk semua (a, b), (c, d) ∈ A, (a, b) R (c, d) ⇔ ad = bc

Berapa jumlah kelas yang terbentuk ? Apa anggota tiap kelas ?

Penyelesaian

(1,3) $\not{R}$ (2,4) karena 1.4 ≠ 3.2, tapi (1,3)R(3,9) karena 1.9 = 3.3

Gambar 3.14 adalah graf relasi R. Jelas tampak bahwa A terbagi menjadi 3 kelas yaitu {(1,3), (3,9)}, {(2,4), (-4,-8), (3,6)} dan {(1,5)}



Gambar 3.14

Relasi R pada soal 3.18 dan 3.19 sebenarnya merupakan cara mendefinisikan bilangan pecahan menggunakan konsep relasi. Dua bilangan pecahan dikatakan sama apabila keduanya terletak pada kelas yang sama. Dalam konsep relasi, bilangan pecahan $\frac{1}{3}$ dinyatakan sebagai pasangan berurutan (1,3). Pecahan $\frac{1}{3} = \frac{3}{9}$. Maka (1,3) dan (3,9) terletak pada kelas yang sama.

Soal 3.17

Misalkan X = {a, b, c}. Didefinisikan relasi biner R pada P(X) sebagai berikut : $\forall$ A, B $\in$ P(X), A R B $\Leftrightarrow$ A mempunyai jumlah anggota yang sama dengan B

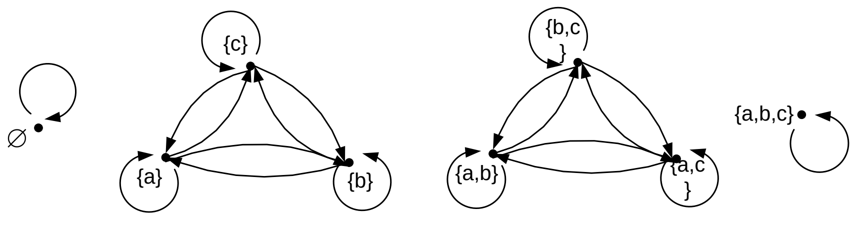
a. Gambarlah relasi R dalam bentuk graf berarah

b. Tunjukkan bahwa R merupakan relasi Ekuivalensi. Apakah kelas yang terbentuk ?

Penyelesaian

Jika X = {a, b, c} maka P(X) = { $\varnothing$,{a},{b},{c},{a,b},{a,c},{b,c}, {a,b,c}}.

Gambar 3.15 adalah graf relasi R



Gambar 3.15

Tampak dari gambar bahwa R relfeksif, yang terlihat dari adanya loop di setiap titiknya. R simetris karena semua garisnya berpasangan. Dengan pengujian satu persatu, akan terlihat bahwa R transitif. Maka R merupakan relasi ekuivalensi.

Kelas-kelasnya adalah

- $\{\emptyset\}$ yang terdiri dari himpunan yang tidak memiliki anggota
- {{a}, {b}, {c}} yang terdiri dari himpunan-himpunan yang memiliki 1 anggota
- {a,b}, {a,c}, {b,c}} yang terdiri dari himpunan-himpunan yang memiliki 2 anggota
- {{a,b,c}} yang terdiri dari himpunan-himpunan yang memiliki 3 anggota

Semua kelas memiliki kesamaan yaitu jumlah anggotanya sama. Hal ini sesuai dengan definisi relasi yang dibuat.

Soal 3.18

Relasi R didefinisikan atas himpunan $A = \{x \in \text{Riil} \mid 0 \le x < 5\}$ dengan aturan $\forall x, y \in R \quad x \, R \, y \Leftrightarrow (x - y)$ bilangan bulat

Berapa jumlah kelas yang terbentuk ? Berapa jumlah anggota dalam suatu kelas ?

Penyelesaian

Agar memiliki gambaran tentang anggota relasi, terlebih dahulu kita cari beberapa anggota R.

Bilangan riil 0,3 R 1,3 karena (0,3-1,3) = -1 (bulat). Demikian juga 0,3 R 2,3 ; 0,3 R 3,3 dan seterusnya. Jadi bilangan riil 0,3 ; 1,3 ; 2,3 ; 3,3 dan 4,3 membentuk sebuah kelas. Semua anggota kelas ini memiliki kesamaan yaitu angka desimalnya = 0,3

Akan tetapi 0,31 $\not R$ 0,3 karena (0,31 – 0,3) = 0,01 yang bukan bilangan bulat. 0,31 R 1,31 karena (0,31 - 1,31) = -1 (bulat). Jadi 0,31 ; 1,31 ; 2,31 ; 3,31 ; 4,31 akan membentuk sebuah kelas yang berbeda. Semua anggota kelas ini memiliki kesamaan yaitu angka desimalnya = 0,31

Dengan menggunakan analogi yang sama, 0,311 ; 1,311 ; 2,311 ; 3,311 ; 4,311 membentuk sebuah kelas yang berbeda lagi.

Karena ada tak berhingga banyak bilangan riil antara 0 dan 5, maka jumlah kelas yng terbentuk juga tak berhingga banyak. Masing-masing kelas terdiri dari 5 anggota yaitu bilangan riil antara 0 dan 5 yang bilangan desimalnya sama

Soal 3.19

Relasi modulo adalah relasi sisa pembagian aritmetika biasa pada himpunan bilangan bulat.

a mod b berarti sisa pembagian yang ada jika a dibagi dengan b.

Misalkan m dan n adalah bilangan-bilangan bulat dan d adalah bilangan bulat positif. Notasi $m \equiv n \pmod d$ yang dibaca: "m kongruen dengan n modulo d", berarti bahwa $d|(m-n)$ atau $(m-n)$ habis dibagi d. Dengan kata lain, m dan n memilki sisa yang sama jika dibagi dengan d.

Misalkan R adalah relasi kongruensi modulo 3 pada himpunan bilangan bulat. Jadi untuk semua bilangan bulat m dan n.

$$m\,R\,n \iff 3 \mid (m-n) \iff m \equiv n \pmod 3$$

Carilah kelas-kelas ekuivalensi R.

Penyelesaian :

Misalkan a adalah suatu bilangan bulat $\in Z$

$$\begin{aligned}[a] &= \{x \in Z \mid x\,R\,a\} \\ &= \{x \in Z \mid 3 \mid (x-a)\} \\ &= \{x \in Z \mid x-a = 3k \text{ untuk suatu } k \in Z\} \\ &= \{x \in Z \mid x = 3k+a \text{ untuk suatu } k \in Z\}\end{aligned}$$

Secara khusus,

$[0] = \{x \in Z \mid x = 3k \text{ untuk suatu } k \in Z\} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$

$[1] = \{ x \in Z \mid x = 3k+1 \text{ untuk suatu } k \in Z \} = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots \}$

$[2] = \{ x \in Z \mid x = 3k+2 \text{ untuk suatu } k \in Z \} = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}$

$[3] = \{ x \in Z \mid x = 3k+3 \text{ untuk suatu } k \in Z \} = \{ \dots, -3, 0, 3, 6, \dots \} = [0]$

Jika dilanjutkan, akan didapat :

$[0] = [3] = [-3] = [6] = [9] = \cdots$

$[1] = [4] = [-2] = [7] = [10] = \cdots$

$[2] = [5] = [-1] = [8] = [11] = \cdots$

Tampak bahwa setiap bilangan bulat selalu berada pada satu di antara kelas [0], [1] atau [2]. Maka kelas-kelas ekuivalensi yang berbeda adalah : [0], [1] dan [2].

Jadi relasi ekuivalensi modulo akan membagi semua bilangan bulat menjadi 3 bagian yaitu :

- [0], yang merupakan himpunan semua bilangan bulat yang habis dibagi 3.
- [1], yang merupakan himpunan semua bilangan bulat yang bersisa 1 jika dibagi dengan 3.
- [2] yang merupakan himpunan semua bilangan bulat yang bersisa 2 jika dibagi dengan 3.

Operasi Pada Relasi

Soal 3.20

Misalkan $A = \{ -1, 0, 1 \}$ dan $B = \{ 0, 1 \}$. Relasi R dan S dari himpunan A ke himpunan B adalah sebagai berikut :

$$R = \{ (-1,0), (-1,1), (0,1) \} \quad ; \quad S = \{ (0,0), (1,1), (-1,1) \}$$

Carilah $R \cup S$ dan $R \cap S$

Penyelesaian :

$R \cup S$ = { (-1,0), (-1,1), (0,1), (0,0), (1,1) }

$R \cap S$ = { (-1,1) }

Soal 3.21

Misalkan R dan S adalah relasi-relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat positif I.

R = { (x, 2x) | x $\in$ I } ; S = { (x, 7x) | x $\in$ I }

Carilah R $\bullet$ S dan R $\bullet$ R.

Penyelesaian :

R = { (1,2), (2,4), (3,6), (4,8), (5,10), (6,12), … }

S = { (1,7), (2,14), (3,21), (4,28), … }

Maka

R $\bullet$ S = { (1,14), (2,28), (3,42), … } = { (x, 14x) | x $\in$ I }

R $\bullet$ R = { (1,4), (2,8), (3,12), … } = { (x, 4x) | x $\in$ I }

Soal 3.22

Misal X = {0, 1}. Relasi R, S, T didefinisikan pada P(X) (Power Set X) dengan aturan sbb :

$$\forall A, B \in P(X) \quad A\,R\,B \Leftrightarrow A \neq B$$

$$\forall A, B \in P(X) \quad A\,S\,B \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$$

$$\forall A, B \in P(X) \quad A\,T\,B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

a. Tentukan R, S dan T

b. Tentukan $R \cap S$

c. Apakah $T \subseteq S$?

d. Carilah elemen yang menjadi anggota ketiga relasi

Penyelesaian

Jika X={0,1} maka P(X) = {∅,{0}, {1}, {0,1}}

a. Semua anggota P(X) berbeda, maka setiap pasangan elemen berbeda akan berelasi dengan relasi R. R = {(∅,{0}), (∅,{1}), (∅,{0,1}), ({0},∅), ({0},{1}), ({0},{0,1}), ({1},∅), ({1},{0}), ({1},{0,1}), ({0,1},∅), ({0,1},{0}), ({0,1},{1})

   Relasi S berisi pasangan himpunan yang jika diiriskan akan menghasilkan ∅. S = { (∅,∅), (∅,{0}), (∅,{1}), (∅,{0,1}), ({0},∅), ({0},{1}), ({1},∅), ({1},{0}), ({0,1},∅) }

   T = { (∅,∅), (∅,{0}), (∅,{1}), (∅,{0,1}), ({0},{0}), ({0},{0,1}), ({1},{1}), ({1},{0,1}), ({0,1},{0,1}) }

b. $R \cap S$ = { (∅,{0}), (∅,{1}), (∅,{0,1}), ({0},∅), ({0},{1}), ({1},∅), ({1},{0}), ({0,1},∅) }

c. $T \not\subseteq S$ karena ({0},{0}) $\in$ T tetapi ({0},{0}) $\notin$ S

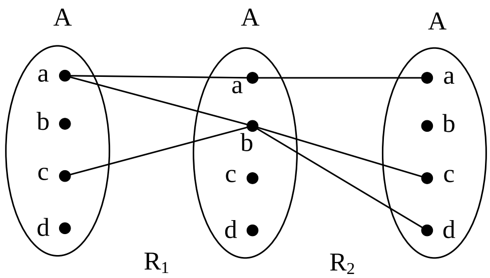
d. Elemen anggota ketiga relasi merupakan irisan dari ketiga relasi. $R \cap S \cap T$ = { (∅,{0}), (∅,{1}), (∅,{0,1}) }

Soal 3.23

Misalkan A = {a, b, c, d }. Relasi R_1 dan R_2 didefinisikan pada A sebagai berikut : R_1 = { (a,a), (a,b), (c,b) } ; R_2 = { (a,a), (b,c), (b,d) }. Carilah $R_1 \bullet R_2$

Penyelesaian :

$R_1 \bullet R_2$ lebih mudah dicari dengan menggambarkannya seperti gambar 3.16. $R_1 \bullet R_2$ merupakan relasi antara himpunan A paling kiri "langsung" ke himpunan A paling kanan yang dilakukan lewat himpunan yang di tengah.



Gambar 3.16

Komposisinya adalah $R_1 \bullet R_2$ = {(a,a), (a,c), (a,d), (c,c), (c,d)}

Soal 3.24

Misalkan A = {a, b, c, d, e}. Relasi $R \subseteq A \times A$ didefinisikan sebagai berikut : R = { (a,a), (a,b), (b,c), (c,d), (c,e), (d,e) }. Carilah tutupan transitifnya secara langsung menurut definisi dan melalui grafnya.

Penyelesaian :

- Secara langsung :

$R^2 = R \bullet R$ = { (a,a), (a,b), (a,c), (b,d), (b,e), (c,e) }

$R^3 = R^2 \bullet R$ = { (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e), (b,e) }

$R^4 = R^3 \bullet R$ = { (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e) }

$R^5 = R^4 \bullet R$ = { (a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (a,e) }

Tampak bahwa $R^4 = R^5$, sehingga pastilah $R^4 = R^5 = R^6 = R^7 = \cdots$

Maka $R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$

= {(a,a), (a,b), (b,c), (c,d), (c,e), (d,e), (a,c), (b,d), (b,e), (a,d), (a,e)}

- Mencari tutupan transitif lewat grafnya.

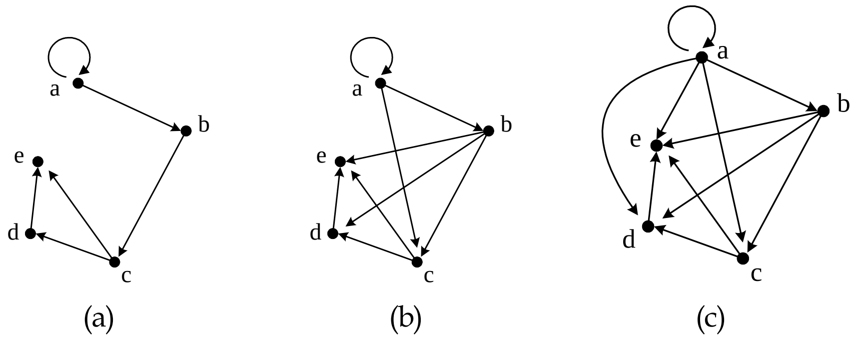
Graf relasi mula-mula tampak pada gambar 3.17a. Garis yang bisa didapat secara transitif dari graf gambar 3.17a adalah :

$a \rightarrow c$ (karena ada garis dari $a \rightarrow b$ dan $b \rightarrow c$)

$b \rightarrow d$ (karena ada garis dari $b \rightarrow c$ dan $c \rightarrow d$)

$b \rightarrow e$ (karena ada garis dari $b \rightarrow c$ dan $c \rightarrow e$)

Dengan menambahkan garis-garis tersebut ke gambar 3.17a, maka didapat graf yang tampak pada gambar 3.17b



Gambar 3.17

Selanjutnya kembali dicari garis lain yang bisa didapat secara transitif dari graf gambar 3.17b

$a \rightarrow d$ (karena ada garis dari $a \rightarrow c$ dan $c \rightarrow d$)

$a \rightarrow e$ (karena ada garis dari $a \rightarrow c$ dan $c \rightarrow e$).

Dengan menambahkan garis-garis baru tersebut ke gambar 3.17b, maka didapat graf gambar 3.17c.

Karena tak ada garis lain yang bisa didapat secara transitif maka graf gambar 3.17c adalah graf tutupan transitifnya.

Soal 3.25

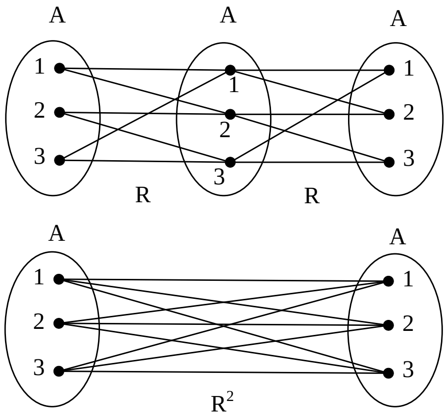
Diketahui relasi R yang didefinisikan pada { 1, 2, 3 } yang dinyatakan dengan matriks biner $R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a. Tentukan matriks biner yang menyatakan relasi R^2

b. Carilah Tutupan Transitifnya. Nyatakan dalam bentuk matriks

Penyelesaian

a. Mencari $R^2 = R \bullet R$ secara langsung dari matriks agak sulit dan bukan dengan cara perkalian matriks biasa. Karena domain dan kodomain merupakan himpunan yang sama, R^2 lebih mudah dicari dari diagramnya, seperti yang tampak pada gambar 3.18. Gambar 3.18 atas merupakan relasi R mula-mula, dan gambar 3.18 bawah adalah hasil komposisinya, yang didapat menggandengkan kedua relasi yang terdapat pada gambar 3.18 atas



Gambar 3.18

Jadi R^2 = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3) }.

Dalam bentuk matriks, $R^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

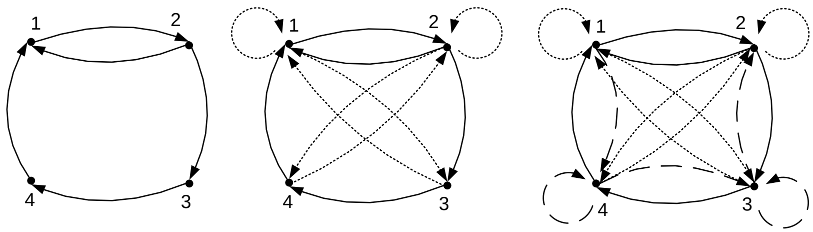
b. Karena $R^2 = A \times A$, maka tutupan transitifnya = $R^+ = R^2$

Soal 3.26

Jika R didefinisikan pada A = {1, 2, 3, 4} dengan R = { (1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (4,1) }, carilah R* (Refleksif Transitif Closure R)

Penyelesaian

Gambar 3.19a menunjukkan graf relasi R mula-mula. Gambar 3.19b adalah graf $R^2 = R \bullet R$. Garis putus-putus halus adalah anggota baru relasi R^2 hasil komposisi 2 anggota R. Gambar 3.19c adalah graf $R^3 = R^2 \bullet R$. Garis putus-putus kasar adalah anggota baru R^3 hasil komposisi 2 anggota R^2.



(a) (b) (c)

Gambar 3.19

Tampak bahwa anggota R^3 sudah mencakup semua relasi yang mungkin dibuat dari anggota-anggota A. Dengan kata lain $R^3 = A \times A$, sehingga bisa dipastikan bahwa penghitungan R^4, R^5, … tidak akan menambah anggota relasi.

Jadi $R^* = A \times A$ = { (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (3,1), (3,2), (3,3), (3,4), (4,1), (4,2), (4,3), (4,4) }

Soal 3.27

Misalkan A = {a, b, c, d}. Relasi R_1 dan R_2 didefinisikan pada A sebagai berikut :

R_1 = { (a, b), (a, c), (b, d) } ; R_2 = { (a, b), (a, c), (a, d) }. Tentukan :

a. $R_1 - R_2$

b. $R_1^* - R_2^*$

Penyelesaian

a. $R_1 - R_2 = \{ (b,d) \}$

b. Dengan menggunakan graf seperti soal 3.26, perhitungan R_1^* hanya akan menambah sebuah anggota pada R_1 yaitu (a,d), sehingga $R_1 = \{ (a, b), (a, c), (b, d), \mathbf{(a,d)} \}$.

   $R_2^* = R_2 = \{ (a, b), (a, c), (a, d) \}$.

   Maka $R_1^* - R_2^* = \{ (a, b), (a, c), (b, d), (a,d) \} - \{ (a, b), (a, c), (a, d) \} = \{(b,d)\}$

Relasi Partial Order

Soal 3.28

Didefinisikan relasi R pada himpunan bilangan bulat Z dengan aturan : $\forall m,n \in Z \quad m \text{ R } n \;\Leftrightarrow\; m+n \;\text{ genap}$.

Apakah R membentuk relasi Partial Order ? Jika ya, buktikanlah. Jika tidak, syarat manakah yang gagal dipenuhi ?

Penyelesaian

R bukan relasi artial order karena R tidak antisimetris. Sebagai contoh penyangkalnya, ambil m=2 dan n=4. mRn (karena 2+4 genap) dan nRm (karena 4+2 genap), tetapi $2 \neq 4$

Soal 3.29

Mana diantara relasi-relasi berikut ini yang merupakan relasi Partial Order terhadap himpunan bilangan bulat ?

a. $m \text{ R } n \Leftrightarrow m+n = 5$

b. $m \, R \, n \Leftrightarrow m \leq n$

c. $m \, R \, n \Leftrightarrow m - n$ merupakan bil genap

Penyelesaian

a. Bukan partial order karena tidak ada satupun syarat yang terpenuhi.

R tidak refleksif karena untuk m=1, $m \not R\, m$ $(1+1 \neq 5)$

R tidak antisimetris karena untuk m=2, n= 3 berlakulah mRn (2+3=5) dan nRm (3+2=5), tetapi m≠n

R tidak transitif karena untuk m=1, n=4 dan p=1, berlakulah mRn (1+4=5), nRp (4+1=5), tetapi $m \not R\, p$ $(1+1 \neq 5)$

b. R partial order.

R refleksif karena setiap bilangan bulat lebih kecil atau sama dengan dirinya sendiri.

R antisimetris karena menurut teori bilangan, jika $m \leq n$ dan $n \leq m$, maka berarti m=n

R transitif karena operator $\leq$ pada bilangan bersifat transitif

c. R tidak antisimetris sehingga R bukan relasi partial order. Untuk m=6 dan n=4, berlakulah 6R4 (6-4=2 bilangan genap) dan 4R6 (4-6=-2 bilangan genap). Akan tetapi $6 \neq 4$.

Soal 3.30

Misalkan relasi R adalah relasi "pembagi" pada himpunan bilangan bulat positif A. a|b berarti a adalah faktor dari b atau b merupakan kelipatan a.

$$(\forall\, a,b \in A)\ a \, R \, b \Leftrightarrow a \mid b$$

Buktikan bahwa R adalah relasi Partial Order.

Penyelesaian :

- Refleksif

  Ambil sembarang $a \in A$. Jelas bahwa $a = 1.\,a$ sehingga aRa. Jadi R refleksif

- Antisimetris

  Ambil sembarang bilangan bulat positip a, b yang memenuhi aRb dan bRa.

  aRb berarti $b = k_1 a$ untuk suatu bilangan bulat positif k_1.

  bRa berarti $a = k_2 b$ untuk suatu bilangan bulat positif k_2.

  Maka $b = k_1 a = k_1 (k_2 b) = (k_1 k_2) b$

  Jika kedua ruas dibagi dengan b maka diperoleh $k_1 k_2 = 1$.

  k_1 dan k_2 adalah bilangan-bilangan bulat positif, maka agar relasi $k_1 k_2 = 1$ dipenuhi, satu-satunya kemungkinan adalh $k_1 = k_2 = 1$.

  Diperoleh $b = k_1 a = 1\,a = a$. Dari $a R b$ dan $b R a$ diperoleh $a = b$. Maka R bersifat antisimetris.

- Transitif

  Ambil sembarang bilangan bulat positip a, b, c yang memenuhi aRb dan bRc.

  aRb berarti bahwa $b = k_1 a$ untuk suatu bilangan bulat positif k_1

  bRc berarti bahwa $c = k_2 b$ untuk suatu bilangan bulat positif k_2

  Maka $c = k_2 b = k_2 (k_1 a) = (k_2 k_1) a$.

  Ambil $k = k_2 k_1$. Karena k_1 dan k_2 adalah bilangan bulat positif maka k juga bilangan bulat positif. Jadi $c = k\,a$ untuk suatu bilangan bulat positif k. Ini berarti aRc.

  Terbukti bahwa relasi R bersifat transitif.

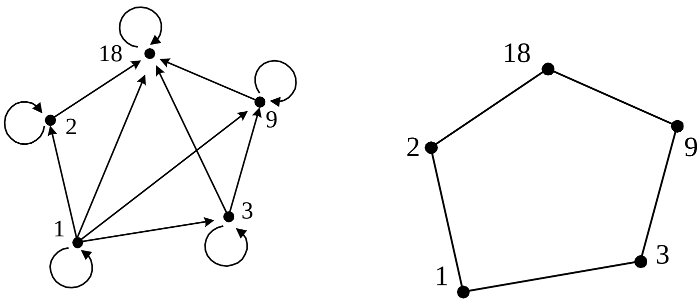
Terbukti bahwa R adalah relasi yang refleksif, antisimetris dan transitif sehingga R adalah relasi Partial Order.

Soal 3.31

Buatlah diagram Hasse pada relasi pembagi R soal 3.30 pada himpunan A = {1, 2, 3, 9, 18}.

Penyelesaian :

Graf berarah relasi partial order R tampak pada gambar 3.20 a. Untuk menjadikan ke diagram Hasse, semua garis harus mengarah ke atas. Jadi posisi titik 1 dan 3 tidak boleh sejajar karena ada garis dari 1 ke 3. Tetapi posisi titik 2 dan 3 boleh sejajar karena tidak ada garis yang menghubungkan titik 2 dan 3.



(a) (b)

Gambar 3.20

Graf relasi partial order selalu memuat loop pada tiap titiknya (karena refleksif) dan selalu memuat garis yang bisa dicapai lewat sifat transitif. Sebagai contoh, karena ada garis dari titik 1 ke 3 (karena $1|3$) dan dari 3 ke 9 (karena $3|9$), maka pasti ada garis dari 1 ke 9. Diagram Hasse pada gambar 3.20b didapat dari gambar 3.20a dengan menghilangkan loop di tiap titik dan garis yang bisa didapat dari implikasi sifat transitif. Sebagai contoh, garis dari titik 1 ke 9 dihilangkan karena bisa diganti garis dari titik 1 ke 3 dan dari 3 ke 9.

Soal 3.32

Diketahui relasi R yang didefinisikan pada himpunan S = {0, 1, 2, 3} dengan aturan : $\forall$ m, n $\in$ S, m R n $\Leftrightarrow$ m $\leq$ n

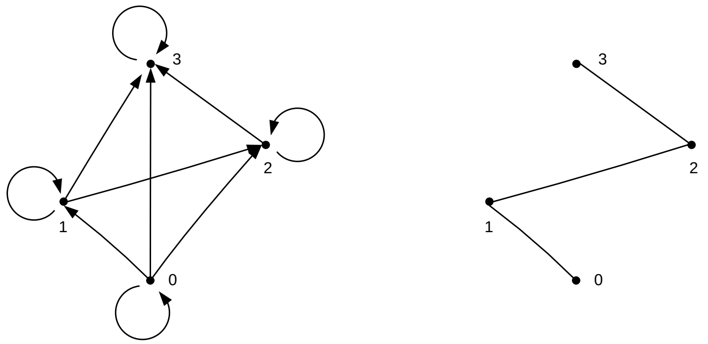
a. Nyatakan R dalam bentuk graf berarah

b. Buatlah diagram Hasse yang sesuai dengan R

c. Tentukan elemen maksimal, minimal, terbesar dan terkecilnya.

Penyelesaian

Graf berarah relasi R tampak pada gambar 3.21a. Diagram Hasse yang sesuai dinyatakan pada gambar 3.21b. Caranya adalah dengan menghilangkan loop di tiap titik, garis transitif serta anak panah pada gambar 3.21a



(a) (b)

Gambar 3.21

Diagram Hasse gambar 3.21 b tampak seperti sebuah garis ke atas. Maka elemen minimal = elemen terkecil = 0 dan elemen maksimal = elemen terbesar = 3

Soal 3.33

Misalkan A = { 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24 }. Relasi R didefinisikan pada A dengan aturan : aRb $\Leftrightarrow$ a = kelipatan b.

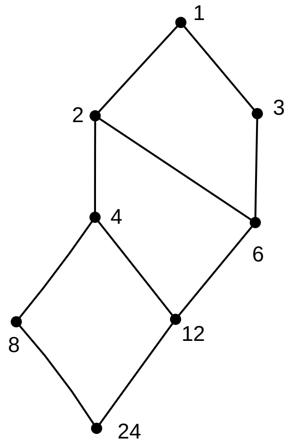
a. Jika relasi R dinyatakan dalam diagram Hasse, berapa jumlah garisnya ?

b. Tentukan LUB (2, 6) ; GLB(4, 6)

c. Tentukan elemen minimal, terkecil, maksimal, terbesar

Penyelesaian

Relasi R merupakan kebalikan dari relasi membagi (" | ") pada soal 3.30-3.31. Diagram Hasse yang sesuai dengan R tampak pada gambar 3.22. Diagram tersebut diperoleh dari graf relasi dan menghilangkan garis-garis yang perlu dihapus.



Gambar 3.22

Anggota A yang posisinya paling atas adalah elemen 1 karena setiap bilangan merupakan kelipatan 1. Elemen 24 terletak pada posisi paling bawah karena 24 merupakan kelipatan semua anggota A sehingga 24Ra $\forall$ a $\in$ A.

a. Diagram Hasse pada gambar 3.22 memiliki 10 garis

b. Batas atas (2, 6) adalah 1 dan 2. LUB (2, 6) = 2

   Batas bawah (4, 6) adalah 12 dan 24. GLB(4, 6) = 12

c. Elemen terkecil = minimal = 24. Elemen terbesar = maksimal = 1

Soal 3.34

Misal A = {a, b, c, d}. Relasi R didefinisikan pada P(A) (Power Set) dengan aturan sbb : $\forall A, B \in P(A) \quad A R B \Leftrightarrow A \subseteq B$

a. Berikan contoh pasangan elemen yang incomparabel
b. Tentukan elemen maksimal, terkecil
c. Tentukan LUB ({a}, {b,c})
d. Tentukan GLB ({a,b}, {c,d})

Penyelesaian

Jika digambarkan, graf dan diagram Hasse yang terbentuk mirip dengan gambar 3.6 (lihat caranya pada contoh 3.6). Hanya saja diagram Hasse nya memiliki 2^4 = 16 buah titik.

a. Pasangan yang incomparabel adalah 2 himpunan anggota P(X) yang tidak memiliki relasi himpunan bagian. Contohnya : {a} dengan {b}, {a,b} dengan {b,c}, dll
b. Elemen maksimal = {a,b,c,d}. Elemen terkecil = elemen minimal = $\varnothing$
c. LUB ({a}, {b,c}) = {a,b,c}
d. GLB ({a,b}, {c,d}) = $\varnothing$

Soal 3.35

Misalkan X = {a, b, c, d} dan P(X) = himpunan kuasa X. Relasi R didefinisikan atas P(X) dengan aturan sebagai berikut : $\forall A, B \in P(X) \quad A\,R\,B \Leftrightarrow B \subseteq A$

a. Tentukan elemen terbesar dan terkecilnya !

b. Tentukan GLB ({a,b} , {b,c,d})

c. Tentukan LUB ({a,b}, {a,b,c})

Penyelesaian

Perhatikan perbedaan relasi soal 3.35 dengan 3.34. Dalam soal 3.34, relasinya adalah subset (himpunan bagian). Dalam soal 3.35, relasinya adalah superset. ARB bila dan hanya bila A adalah superset B, sehingga {a,b}R{a} dan tidak sebaliknya. Diagram Hasse kedua soalpun tampak terbalik. Elemen $\varnothing$ yang menjadi elemen terkecil pada soal 3.34 menjadi elemen terbesara pada soal 3.35

a. Elemen terbesar adalah elemen yang letaknya paling atas pada diagram Hasse, yaitu $\varnothing$, karena setiap himpunan merupakan superset dari himpunan kosong. Elemen terkecil = {a,b,c,d}

b. GLB ({a,b} , {b,c,d}) = {a,b,c,d}

c. LUB ({a,b}, {a,b,c}) = {a,b}

Soal 3.36

Misalkan A = { 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6 }. Relasi partial order R didefinisikan pada A dengan aturan sebagai berikut : $\forall x, y \in A \quad x\,R\,y \Leftrightarrow y \mid x$.

a. Jika R dinyatakan dalam diagram Hasse, berapa jumlah garisnya ?

b. Tuliskan elemen terbesar dan terkecilnya !

c. Carilah LUB (2^2 , 2^4)

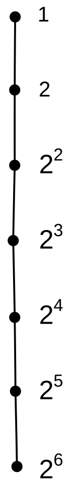
d. Apakah R merupakan relasi total order ?

Penyelesaian

Ingat kembali bahwa $y \mid x$ berarti y adalah faktor dari x, atau x kelipatan y. $2^3 \, R \, 2^2$ karena $2^2 \mid 2^3$, tapi $2^2 \not R \, 2^3$.

Menggunakan definisi ini, maka 2^6 berelasi dengan semua anggota A sehingga dalam grafnya terdapat garis dari elemen 2^6 ke semua anggota A (termasuk loop ke dirinya sendiri). 2^5 berelasi ke 1, 2, 2^2, 2^3, 2^4 dan 2^5. … dan seterusnya. Elemen 1 hanya berelasi dengan dirinya sendiri saja.

Jika kemudian grafnya dijadikan diagram Hasse, maka garis yang terbentuk akan "lurus" ke atas, seperti gambar 3.23



Gambar 3.23

a. Jumlah garis gambar 3.23 adalah 6 buah

b. Elemen terbesar = 1, terkecil = 2^6

c. LUB (2^2 , 2^4) = 2^2

d. R merupakan relasi total order karena diagram Hassenya hanya memiliki sebuah garis lurus

Soal 3.37

Misalkan S = {1, 2, 4 }. Relasi R didefinisikan atas SxS dengan aturan $\forall\ a,b\ ,\ c,d\ \in S \times S$ (a, b) R (c, d) $\Leftrightarrow$ a | c dan b | d.

a. Apakah 2 R 4 ? (1, 4) R (4, 2) ? (1,1) R (4,4) ?
b. Gambarlah diagram Hasse relasi R.
c. Tentukan LUB ((1, 4), (2, 2)), GLB ((1, 4), (4, 1))
d. Tentukan elemen maksimalnya.
e. Apakah R merupakan Lattice ?

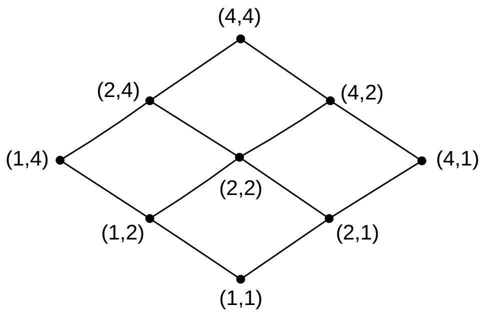
Penyelesaian

a. Relasi R didefinisikan atas SxS (anggotanya berupa pasangan berurutan), bukan atas S. Maka jelas bahwa $2 \not R\, 4$ karena 2 dan 4 bukanlah anggota SxS.

   $(1,4) \not R\ (4,2)$ karena meskipun $1|4$, tetapi $4 \nmid 2$

   $(1,1)\, R\, (4,4)$ karena $1|4$ dan $1|4$

b. Diagram Hasse relasi R tampak pada gambar 3.24



Gambar 3.24

c. Berdasarkan diagram Hasse gambar 3.24, LUB ((1, 4), (2, 2)) = (2,4) ; GLB ((1, 4), (4, 1)) = (1,1)

d. Elemen maksimal = (4,4)

e. R merupakan Lattice

Soal 3.38

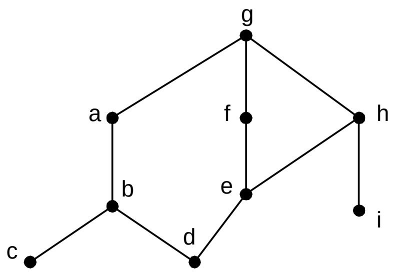
Pada diagram Hasse gambar 3.25 :

a. Carilah elemen terbesar, maksimal, terkecil dan minimal

b. GLB (a, e), GLB (f, h), GLB (e, i), GLB (a, b), GLB (a, i)

c. LUB (a, e), LUB (c, d), LUB (e, f)

d. Apakah Poset gambar 3.12 merupakan Lattice



Gambar 3.25

Penyelesaian :

a. Elemen maksimal adalah g. Karena hanya ada 1 elemen maksimal, maka elemen terbesarnya juga g

Elemen minimal adalah c, d, dan i karena c, d dan i $\leq$ semua elemen lain atau tidak komparabel.

Elemen terkecil tidak ada. c bukan elemen terkecil karena c $\not\leq$ d, demikian pula d dan i juga bukan elemen terkecil.

b. GLB (a, e) = d

Batas bawah f dan h adalah d dan e. Karena antara d dan e dapat dibandingkan dan d ≤ e, maka dan GLB (f, h) = e

GLB (e, i) tidak ada

Batas bawah a dan b adalah c, b, dan d. GLB (a, b) = b karena c ≤ b dan d ≤ b

GLB (a, i) tidak ada

c. LUB (a, e) = g

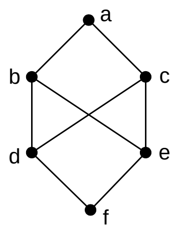
Batas atas c dan d adalah b, a, dan g. LUB (c, d) = b karena b ≤a dan b ≤g

LUB (e, f) = f

d. Bukan Lattice karena beberapa pasang elemen tidak memiliki GLB (jawaban (b))

Soal 3.39

Gambar 3.26 adalah Diagram Hasse relasi R.



Gambar 3.26

a. Apakah f R a ? f R f ? d R c ? b R e ?

b. Tentukan LUB (b, e)

c. Tentukan elemen terbesar dan terkecilnya.

d. Apakah R merupakan Lattice ?

Penyelesaian

a. Dalam diagram Hasse, xRy jika ada garis (langsung ataupun tidak langsung) yang selalu menaik dari x ke y, atau x=y. Jadi f R a ; f R f ; d R c ; $b \not{R}$ e (tapi eRb)

b. LUB (b,e) = b

c. Elemen terbesar = a. Elemen terkecil = f

d. R bukan Lattice karena GLB (b,c) tidak ada. Batas bawah (b,c) adalah d,e dan f. GLB (b,c) bukan f karena d dan e lebih atas dari f. Tetapi d dan e non komparabel sehingga GLB (b,c) tidak ada

Soal 3.40

Terhadap relasi '|', mana diantara himpunan-himpunan berikut ini yang diagram Hassenya merupakan Lattice ?

a. {1, 3, 6, 9, 12}

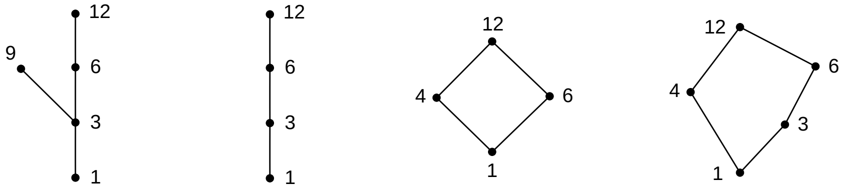
b. {1, 3, 6, 12}

c. {1, 4, 6, 12}

d. {1, 3, 4, 6, 12}

Penyelesaian

Gambar 3.27 merupakan diagram Hasse tiap-tiap relasi.



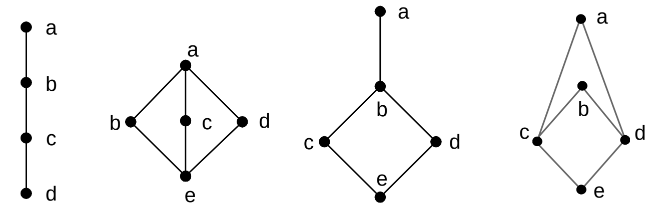
(a) (b) (c) (d)

Gambar 3.27

Tampak bahwa hanya gambar 3.27a yang bukan merupakan Lattice karena LUB (9,6) tidak ada.

Soal 3.41

Mana diantara diagram Hasse berikut ini yang merupakan Lattice ?



(a) (b) (c) (d)

Gambar 3.28

Penyelesaian

Gambar 3.28a-c merupakan Lattice karena setiap pasang elemen memiliki GLB dan LUB.

Gambar 3.28 d bukan Lattice. Batas atas (c,d) adalah a dan b. Tetapi a dan b non komparabel sehingga LUB (c,d) tidak ada.

Soal 3.42

Misal S = {0,1} dan T = S x S. Relasi R didefinisikan pada T dengan aturan : $a,b \;\; \mathrm{R} \;\; c,d \quad \Leftrightarrow \quad a \geq c$ dan $b \geq d$

a. Tulislah semua anggota T

b. Gambarkan relasi R dalam Graf Berarah

c. Buktikan bahwa R merupakan relasi Partial Order

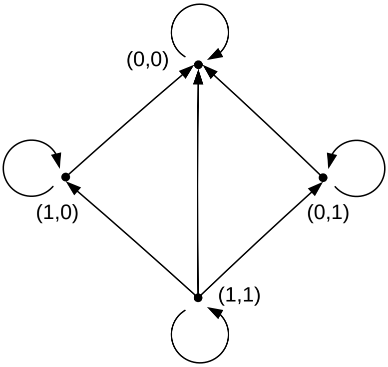
d. Gambarkan diagram Hassenya !

e. Apakah diagram Hasse tersebut merupakan Lattice ?

Penyelesaian

a. T = { (0,0), (0,1), (1,0), (1,1) }

b. Gambar 3.29 menunjukkan R yang dinyatakan dalam graf.



Gambar 3.29

c. Kenyataan bahwa R merupakan relasi partial order dapat dilihat dari gambar 3.29

   R refleksif. Hal ini tampak dari tiap titik yang memiliki loop.

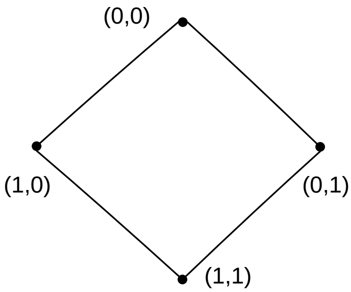
   Tidak ada garis berpasangan yang menghubungkan 2 titik berbeda pada gambar 3.29. Artinya, anteseden implikasi

   $$\forall\ a,b\ ,\ c,d\ \in T \quad a,b\ R\ c,d\ \ dan\ \ c,d\ R\ a,b \quad \Rightarrow a,b\ =\ c,d$$

   selalu bernilai salah. Karena antesedennya selalu salah, maka implikasi selalu benar. Jadi R antisimetris

   R transitif dapat dicek untuk tiap garis gambar 3.29

d. Diagram Hasse tampak pada gambar 3.30



Gambar 3.30

e. Merupakan Lattice karena tiap 2 elemen selalu memiliki LUB dan GLB

SOAL TAMBAHAN

1. Didefenisikan relasi C dari himpunan bilangan riil ke himpunan bilangan riil sebagai berikut : $x, y \in C \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

   a. Tentukan apakah pasangan-pasangan berurutan berikut ini adalah anggota C :

   $$(1, 0)\ ;\ (0, 0)\ ;\ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\ ;\ (-2, 0)\ ;\ (0, -1)$$

   b. Jika anggota-anggota relasi C digambarkan dalam bidang Kartesian, berupa apakah gambar grafiknya?

2. Mana diantara relasi-relasi yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat berikut ini yang bersifat <u>Antisimetris</u> ?

   a. $(\forall a, b \in Z)$ a R b $\Leftrightarrow$ a $\leq$ b

   b. $(\forall a, b \in Z)$ a R b $\Leftrightarrow$ a $\neq$ b

   c. $(\forall a, b \in Z)$ a R b $\Leftrightarrow$ a + b = ganjil

   d. $(\forall a, b \in Z)$ a R b $\Leftrightarrow$ a.b ≥ 0

3. Misal relasi R didefinisikan atas A = himpunan semua manusia di bumi. Manakah diantara relasi yg didefinisikan berikut ini yg bersifat Asimetris

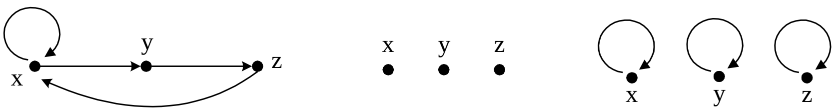
   a. $(\forall a, b \in A)$ a R b $\Leftrightarrow$ a lebih tinggi dari b

   b. $(\forall a, b \in A)$ a R b $\Leftrightarrow$ a dan b lahir pada hari yang sama

   c. $(\forall a, b \in A)$ a R b $\Leftrightarrow$ a dan b mempunyai nama depan yang sama

   d. $(\forall a, b \in A)$ a R b $\Leftrightarrow$ a dan b mempunyai kakek yang sama

4. Manakah diantara ke-6 jenis relasi pada bab 3.2 yang terpenuhi dalam relasi R yang dinyatakan dalam graf gambar 3.31



(a) (b) (c)

Gambar 3.31

5. Misal A = { a, b, c, d }. Relasi R didefinisikan pada A = {(a,a), (a,c), (a,d), (b,b), (c,c), (c,a), (d,d), (d,a) }

   a. Buatlah graf relasi R

   b. Apakah R merupakan relasi ekuivalensi ? Jika ya, tentukan kelas-kelas ekuivalensinya. Jika tidak, syarat manakah yang gagal dipenuhi ?

   c. Carilah R^2 . Apakah R^2 juga merupakan relasi ekuivalensi ? Jelaskan

6. Misalkan A = {1, 2, 3, 4} dan R : $A \rightarrow A$. Mana diantara relasi R berikut ini yang merupakan relasi ekuivalensi ?

   a. { (2,2), (2,3), (2,4), (3,2), (3,3), (3,4) }

   b. { (2,4), (4,2) }

c. { (1,1), (2,2), (3,3), (4,4) }

7. Misalkan R adalah relasi yang didefinisikan atas himpunan bilangan bulat. Manakah diantara definisi R berikut ini yang membentuk relasi ekuivalensi ?

   a. m R n $\Leftrightarrow$ m = n^2

   b. m R n $\Leftrightarrow$ (m-n) bilangan bulat positif

   c. m R n $\Leftrightarrow$ m $\geq$ n

   d. m R n $\Leftrightarrow$ (m+n) bilangan genap

8. Misal relasi R didefinisikan atas A = himpunan semua manusia di bumi. Manakah diantara relasi yg didefinisikan berikut ini yg merupakan relasi ekuivalensi

   a. $(\forall a, b \in A)$ a R b $\Leftrightarrow$ a dan b berumur sama

   b. $(\forall a, b \in A)$ a R b $\Leftrightarrow$ a dan b pernah bertemu

   c. $(\forall a, b \in A)$ a R b $\Leftrightarrow$ a dan b lahir di negara yang sama

9. Misal A = { 1, 2, 3, 4, ... ,20 }. Relasi R didefinisikan pada A dengan aturan : $\forall x, y \in A$ x R y $\Leftrightarrow$ $4 \mid (x-y)$. Apakah R merupakan Relasi Ekuivalensi ? Jika ya, tentukan kelas-kelas ekuivalensinya. Jika tidak, syarat manakah yang gagal dipenuhi ?

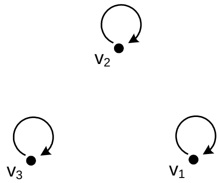
10. Misalkan A = himpunan bilangan asli. Relasi R$\subseteq$A$\times$A didefiniskan sebagai :

    ($\forall$ (a,b) dan (c,d) $\in$ A$\times$ A) (a,b) R (c,d) $\Leftrightarrow$ ad = bc

    a. Buktikan bahwa R adalah relasi ekuivalensi.

    b. Tunjukkan kelas-kelas yang terbentuk dan berilah interpretasinya.

11. Jelaskan kelas-kelas yang terbentuk akibat relasi Ekuivalensi R yang didefinisikan pada himpunan bilangan bulat dengan aturan $\forall m,n \in Z \quad mRn \Leftrightarrow 2 \mid (m-n)$
12. Diketahui relasi R yang dinyatakan dalam graf gambar 3.32. Apakah R adalah relasi ekuivalensi ? Partial Order ?



Gambar 3.32

13. Misalkan A = {1, 2, 3, 4}. Relasi R didefinisikan pada A dengan aturan sebagai berikut ($\forall$ a, b$\in$ A) aRb $\Leftrightarrow$ a$\neq$ b
    a. Berapa Jumlah anggota R ?
    b. Apakah R relasi ekuivalensi ? jika tidak, syarat apakah yang tidak terpenuhi ?
    c. Apakah R relasi partial order ? jika tidak, syarat apakah yang tidak terpenuhi ?
14. Misalkan A = {1, 2, 4, 8, 16}. Relasi biner R didefinisikan atas A dengan aturan sebagai berikut : $\forall a,b \in A$ a R b $\Leftrightarrow$ b | a
    a. Apakah R merupakan relasi Partial Order ? Jika tidak, berilah contoh penyangkalnya. Apabila ya, gambarlah diagram Hassenya.
    b. Carilah R* - R
15. Misalkan A = { 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8 }. Relasi R didefinisikan pada A dengan aturan : a R b $\Leftrightarrow$ a adalah kelipatan b. Buatlah diagram Hasse yang sesuai
16. Misalkan A = {1, 2, 3}. Relasi R didefinisikan pada $A \times A$ dengan aturan sebagai berikut

$(\forall (a,b), (c,d) \in A \times A)\ (a,b)\ R\ (c,d) \iff c \mid a$ dan $d \mid b$

a. Apakah (1,3) R (2,3) ? (1,2) R (2,3) ? (2,2) R (1,1) ?

b. Gambarkan R dalam bentuk diagram Hasse

c. Tentukan elemen maksimal, minimal, terbesar, terkecil !

d. Berapa batas bawah terbesar dari (2,1) dan (1,3) ?

e. Berapa batas atas dari (2,2) dan (2,3) ?

f. Elemen apa yang non-comparable (tidak bisa dibandingkan) dengan elemen (1,1) ?

g. Apakah Poset yang terbentuk merupakan Lattice ? Jika bukan, tuliskan sepasang elemen sebagai contoh penyangkalnya

17. Misalkan $S = \{0,1\}$. Relasi partial order R didefinisikan pada $S \times S \times S$ sebagai : $\forall$(a, b, c) dan (d, e, f) dalam $S \times S \times S$:

$(a, b, c)\ R\ (d, e, f) \iff a \leq d,\ b \leq e$ dan $c \leq f$

a. Jika R dinyatakan dalam bentuk graf, berapa jumlah titiknya ?

b. Gambarlah diagram Hasse yang terbentuk dari R

c. Berapa banyak batas atas dari (0, 0, 0) dan (0, 0, 1) ?

d. Tentukan GLB ((1, 1, 0) , (0, 1, 1))

e. Apakah R memiliki elemen terbesar ? terkecil ?

18. Misalkan A = {1, 2, 3, 4, 5}. Relasi R didefinisikan pada A

R = { (1,1), (1,2), (1,3), (2,2), (2,4), (3,3), (3,4), (4,4), (4,5), (5,5) }

a. Carilah Tutupan Transitif (Transitif Closure) relasi R

b. Apakah R merupakan relasi Partial Order ? Jelaskan alasan anda !

19. Misalkan R_1 = { (a,a), (a,b), (c,b) } dan R_2 = { (a,a), (b,c), (b,d) }. Hitunglah $R_1 \bullet R_2$

20. Suatu relasi biner R dinyatakan dengan matriks Adjacency
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Berapa garis yang perlu ditambahkan untuk menghasilkan R^+ ?

b. Berapa garis dalam $R^* - R^+$?

21. Misalkan R adalah relasi yang didefinisikan pada himpunan A = {1, 2, 3, 4} dengan aturan : $a \text{ R } b \Leftrightarrow a < b$

Tentukan R^+ dan R^*

22. Misalkan A = {0, 1, 2, 3}. Relasi R = { (0,0), (0,1), (0,2), (1,1), (1,3), (2,2), (3,3) }. Hitunglah $R^* - R^+$

23. Diketahui relasi-relasi yang didefinisikan atas himpunan A = {0, 1, 2, 3} : R_1 = {(2,3), (3,2)} dan R_2 = {(0,2), (2,2)}. Carilah $R_1^+ \cap R_2^+$

24. Misal **A** = { 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 18 }. Relasi membagi R didefinisikan pada A dengan aturan $\forall a,b \in A \;\; a\text{R}b \Leftrightarrow a|b$

a. Gambarkan graf berarah yang sesuai dengan relasi tersebut

b. Dari Graf berarah tersebut, gambarlah diagram Hassenya !

25. Misalkan A = { -2, -1, 1, 2 } dan B = { 1,2 }. Didefinisikan relasi R dan S $\subseteq A \times B$ dengan aturan sebagai berikut :

$$\forall (x,y) \in A \times B \;\; x\,R\,y \Leftrightarrow |x| = |y|$$

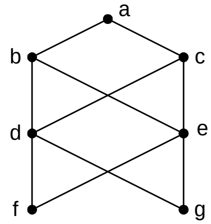
$$\forall (x,y) \in A \times B \;\; x\,S\,y \Leftrightarrow (x-y) \text{ genap}$$

a. Apakah R merupakan relasi Ekuivalensi ?

b. Apakah S merupakan relasi Partial Order ?

c. Carilah $R \cap S$

26. Untuk diagram Hasse gambar 3.33

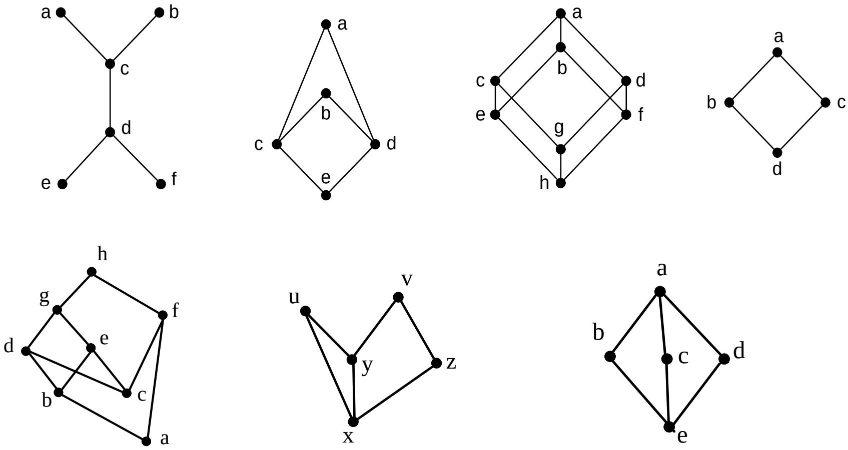


Gambar 3.33

a. Berapa banyak batas atas (c, f) ?

b. Tentukan GLB (a, d)

27. Tentukan apakah Poset yang dinyatakan dengan diagram Hasse gambar 3.34 merupakan Lattice. Jika bukan, berilah contoh penyangkalnya



Gambar 3.34

Bab 4

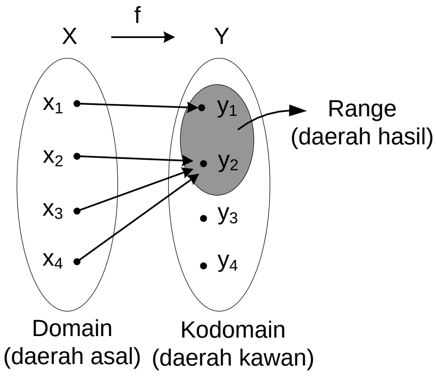
FUNGSI

4.1 Domain, Kodomain dan Range Fungsi

Fungsi f dari himpunan X ke himpunan Y (simbol $f : X \rightarrow Y$) adalah suatu relasi dari X ke Y dengan syarat bahwa setiap elemen $x \in X$ mempunyai kawan yang tunggal di Y.

X disebut **Domain** f dan Y disebut **Kodomain** f. Kawan dari elemen $x \in X$ dinotasikan dengan f(x) dan dibaca : "harga fungsi f di x". Himpunan semua harga fungsi f disebut **Range** f. Hubungan antara Domain, Kodomain dan Range dapat dilihat pada gambar 4.1

$$\text{Range } f = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{ untuk suatu } x \in X\}$$



Gambar 4.1

Secara matematis, suatu fungsi f dari X ke Y didefinisikan sebagai berikut : f adalah fungsi dari X ke Y $\Leftrightarrow$ $(\forall x \in X)(\exists!\ y \in Y)\ f(x) = y$.

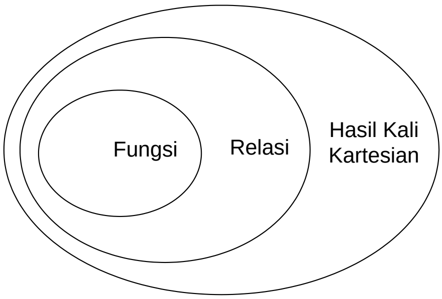
Simbol $\exists!$ berarti : 'terdapatlah dengan tunggal'

Agar suatu relasi f dari X ke Y menjadi fungsi, maka harus dipenuhi :

1. Setiap elemen $x \in X$ mempunyai kawan di Y (disebut f(x)).
2. f(x) tunggal

Syarat fungsi terletak pada Domainnya (= X). Tidak ada syarat khusus tentang Kodomainnya (= Y). Jadi elemen $y \in Y$ boleh tidak mempunyai kawan di X atau mempunyai beberapa kawan di X.

Fungsi merupakan relasi dengan syarat khusus, sehingga fungsi merupakan kejadian khusus dari relasi. Hubungan antara fungsi, relasi dan hasil kali kartesian dari himpunan X ke himpunan Y digambarkan dalam gambar 4.2



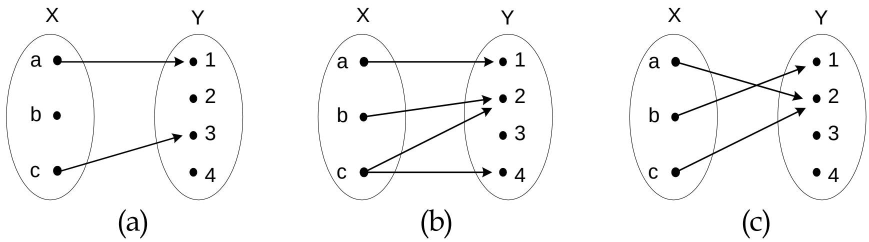
Gambar 4.2

Misalkan f dan g adalah fungsi-fungsi dari X ke Y. Fungsi f sama dengan g (ditulis f = g) bila dan hanya bila $f(x) = g(x)\quad \forall x \in X$.

Contoh 4.1

Diantara ketiga relasi pada gambar 4.3, hanya gambar 4.3(c) yang merupakan fungsi. Gambar 4.3(a) bukan fungsi karena $b \in X$ tidak mempunyai kawan di Y. Gambar 4.3(b) bukan fungsi karena $c \in X$ mempunyai lebih dari satu kawan di Y.

Gambar 4.3(c) merupakan fungsi dengan Domain X = {a,b,c}, Kodomain Y = {1,2,3,4}. Range = {1,2}



Gambar 4.3

4.2 Fungsi Bijektif

Misalkan f adalah suatu fungsi dari X ke Y.

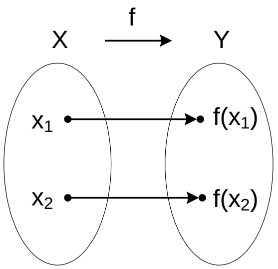
f disebut fungsi **Injektif** (**One to One**) bila dan hanya bila setiap anggota Y paling banyak hanya mempunyai satu kawan di X. Jadi $y \in Y$ boleh tidak mempunyai kawan di X. Tapi kalau mempunyai kawan, kawan tersebut hanya satu.

$f : X \rightarrow Y$ adalah fungsi Injektif $\Leftrightarrow$ $(\forall x_1, x_2 \in X)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

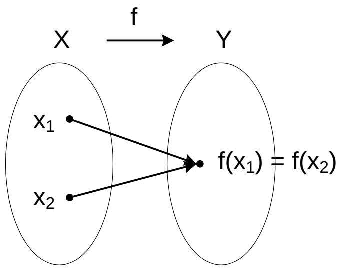
atau kontraposisinya : $(\forall x_1, x_2 \in X)\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Ingkarannya adalah : $f : X \rightarrow Y$ <u>bukan</u> fungsi Injektif $\Leftrightarrow$ $(\exists\, x_1, x_2 \in X)\ f(x_1) = f(x_2)$ tapi $x_1 \neq x_2$

Fungsi pada gambar 4.4(a) merupakan fungsi Injektif, karena 2 elemen x yang berbeda ($x_1 \neq x_2$) dikawankan dengan elemen Y yang berbeda ($f(x_1) \neq f(x_2)$). Sebaliknya, gambar 4.4(b) menunjukkan fungsi yang tidak Injektif karena 2 elemen X yang berbeda ($x_1 \neq x_2$) dikawankan dengan elemen Y yang sama ($f(x_1) = f(x_2)$)



(a)



(b)

Gambar 4.4

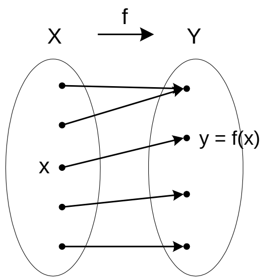
Fungsi f disebut fungsi **Surjetif** (**Onto**) bila dan hanya bila setiap anggota Y mempunyai kawan di X. Kawan anggota Y tersebut boleh lebih dari satu.

$$f : X \rightarrow Y \text{ fungsi Surjektif } \Leftrightarrow (\forall y \in Y)\ (\exists x \in X)\ f(x) = y$$

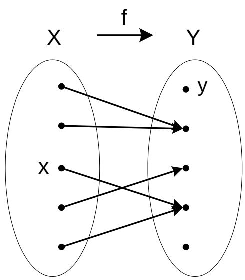
Ingkarannya adalah :

$$f : X \rightarrow Y \ \underline{\text{bukan}} \text{ fungsi Surjektif } \Leftrightarrow (\exists y \in Y)\ (\forall x \in X)\ f(x) \neq y$$

Gambar 4.5(a) merupakan contoh fungsi Surjektif karena setiap anggota Y mempunyai kawan di X. Sebaliknya, gambar 4.5(b) adalah fungsi yang tidak Surjektif karena ada $y \in Y$ yang tidak punya kawan di X. Pada fungsi yang Surjektif, kawan dari $y \in Y$ boleh lebih dari satu, seperti yang tampak pada gambar 4.5(b)



(a)



(b)

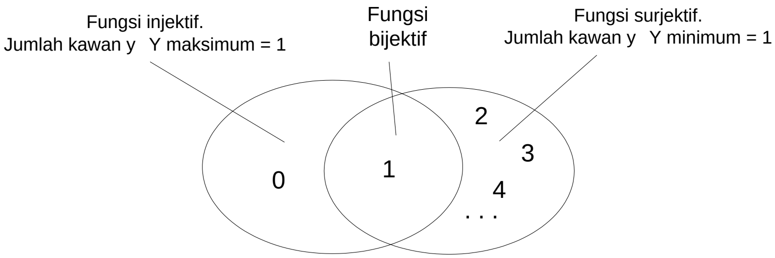
Gambar 4.5

Perhatikan perbedaan syarat fungsi, syarat fungsi Injektif/Surjektif. Syarat agar suatu relasi dari X ke Y merupakan sebuah fungsi $f : X \to Y$ adalah semua elemen Domain (X) mempunyai kawan yang tunggal di Kodomain (Y). Syarat tersebut berpusat pada X (Domainnya). Sebaliknya, syarat agar suatu fungsi menjadi fungsi Injektif/Surjektif berpusat pada Y (Kodomain).

Syarat fungsi Injektif $f : X \to Y$ adalah setiap anggota Y mempunyai paling banyak satu kawan di X. Ini berarti bahwa anggota Y boleh tidak mempunyai kawan di X. Akan tetapi bila mempunyai kawan, kawan tersebut haruslah tunggal. Sebaliknya, syarat fungsi Surjektif adalah setiap anggota Y mempunyai paling sedikit satu kawan di X. Kawan tersebut boleh lebih dari satu.

Suatu fungsi Injektif belum tentu Surjektif dan sebaliknya, suatu fungsi yang Surjektif belum tentu Injektif. Apabila fungsi f Injektif dan sekaligus Surjektif, maka f disebut fungsi **Bijektif** (berkorespondensi satu-satu.

Fungsi Bijektif merupakan irisan dari fungsi Injektif dan Surjektif. Dalam fungsi Bijektif, setiap $y \in Y$ mempunyai tepat satu kawan anggota X. Berarti relasi dari X ke Y maupun dari Y ke X merupakan sebuah fungsi. Hubungan antara fungsi Injektif, Surjektif dan Bijektif digambarkan dengan gambar 4.6. Angka pada gambar 4.6 menunjukkan banyaknya kawan elemen $y \in Y$ pada Domainnya.

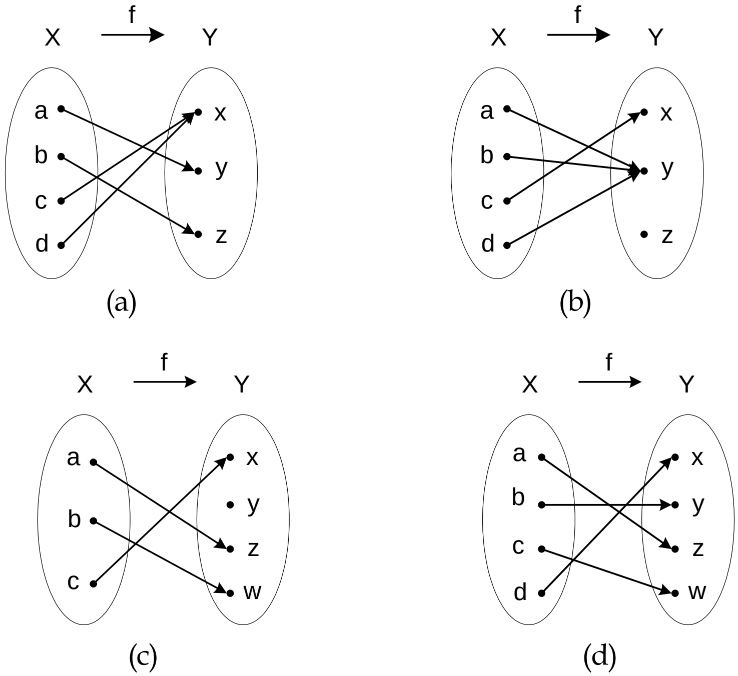


Gambar 4.6

Contoh 4.2

Gambar 4.7(a) adalah fungsi yang Surjektif tapi tidak Injektif. Sebaliknya. gambar 4.7(c) adalah contoh fungsi yang Injektif tapi tidak Surjektif.

Gambar 4.7(b) adalah fungsi yang tidak Injektif dan juga tidak Surjektif, sedangkan gambar 4.7(d) adalah fungsi Bijektif

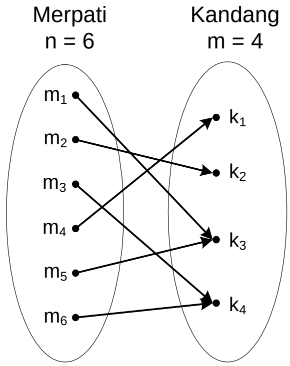


Gambar 4.7

Apabila jumlah anggota himpunan X dan Y pada fungsi f : $X \rightarrow Y$ berhingga, maka penyelidikan apakah fungsi Injektif/Surjektif dapat dilakukan dengan meneliti jumlah kawan setiap anggota Y. Pada fungsi Bijektif, jumah anggota X = jumlah anggota Y. Akan tetapi jika X atau Y merupakan himpunan yang tak berhingga, penyelidikan harus dilakukan menurut definisi fungsi Injektif/Surjektif (lihat soal 14.9)

Konsep fungsi Injektif pada himpunan berhingga dapat diterapkan pada **Prinsip Kandang Merpati** (Pigeonhole Principles) sebagai berikut :

Jika ada n ekor merpati terbang ke m buah kandang merpati dan n > m, maka pasti ada paling sedikit satu buah kandang yang ditempati 2 merpati atau lebih. Hal ini diilustrasikan pada gambar 4.8, dimana ada 6 ekor merpati yang terbang ke 4 kandang. Maka pasti ada kandang yang ditempati oleh lebih dari 1 ekor merpati (k_3 dn k_4)

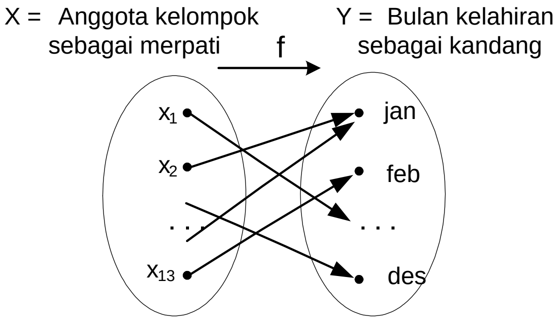


Gambar 4.8

Analogi pada fungsi Injektif adalah sebagai berikut : Misalkan X adalah himpunan dengan n anggota ($|X| = n$) dan Y adalah himpunan dengan m anggota ($|Y| = m$) dengan n > m. Maka fungsi f : $X \rightarrow Y$ tidak mungkin Injektif karena pasti ada paling sedikit 2 elemen dalam X yang mempunyai kawan yang sama di Y.

Contoh 4.3

Dalam kelompok yang terdiri dari 13 orang, pasti ada 2 orang/lebih diantaranya yang lahir pada bulan yang sama. Kenyataan ini diilustrasikan pada gambar 4.9. Merpati dianalogikan dengan orang (ada 13 orang) dan kandang merpati sebagai bulan kelahiran (ada 12 bulan). Maka fungsinya tidak mungkin Injektif. Berarti paling sedikit ada 2 orang yang lahir pada bulan yang sama.



Gambar 4.9

4.3 Invers Fungsi

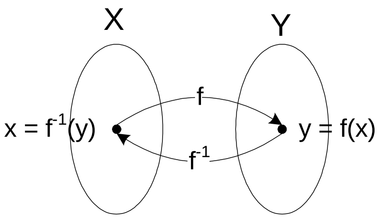
Jika f : X→Y adalah suatu fungsi, relasi Y→X belum tentu suatu fungsi. Akan tetapi jika f : X→Y merupakan fungsi yang Bijektif, maka setiap elemen $y \in Y$ mempunyai tepat satu kawan di X. Ini berarti bahwa relasi dari Y ke X merupakan fungsi juga. Fungsi dari Y ke X disebut invers fungsi f (simbol f^{-1})

Misalkan f : X→Y adalah fungsi Bijektif dan misalkan pula $y \in Y$. Harga invers fungsi f didefinisikan sebagai berikut :

$f^{-1}(y)$ = elemen $x \in X$ sedemikian hingga $f(x) = y$

Jadi $f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$

Gambar 4.10 menunjukkan hubungan antara fungsi dan inversnya.



Gambar 4.10

Contoh 4.4

Untuk menentukan invers fungsi $f : Z \rightarrow Z$ dengan $f(n) = n+2 \ \forall n \in Z$, langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut :

Ambil sembarang $x \in Z$ dengan $f(x) = y$

$$f(x) = y = x+2$$
$$x = y-2$$

Maka $f^{-1}(y) = x = y-2$

Jadi invers fungsi f adalah f^{-1} dengan $f^{-1}(n) = n-2 \ \forall n \in Z$

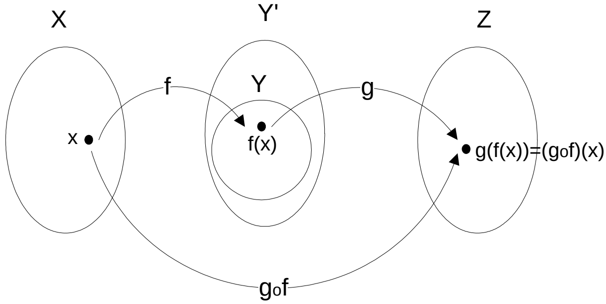
4.4 Komposisi Fungsi

Misalkan $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y' \rightarrow Z$ adalah fungsi-fungsi dengan sifat Kodomain f (=Y) $\subseteq$ Domain g (=Y')

Komposisi fungsi g dan f (simbol $g \circ f$) didefinisikan sebagai berikut :

$$(\forall x \in X)\ (g \circ f)(X) = g(f(x))$$

Gambar 4.11 menunjukkan diagram komposisi fungsi.



Gambar 4.11

Beberapa sifat komposisi fungsi :

a. Jika f dan g adalah fungsi yang Injektif, maka gof juga Injektif.

b. Jika f dan g adalah fungsi yang Surjektif, maka gof juga Surjektif.

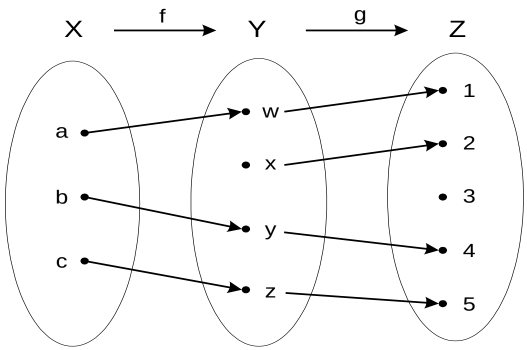
c. $(g \circ f)^{-1}(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})(x)$

d. $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = i(x)$ (i = fungsi identitas)

Contoh 4.5

Misalkan X = {a, b, c} ; Y = {w, x, y, z} dan Z = {1, 2, 3, 4, 5}

Didefinisikan fungsi f : X→Y dan g : Y→Z seperti diagram dalam gambar 4.12.



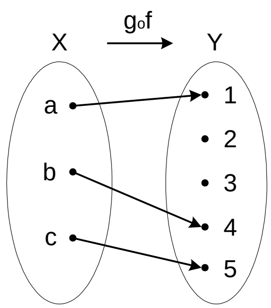
Gambar 4.12

Maka $(g_of)(a) = g(f(a)) = g(w) = 1$

$(g_of)(b) = g(f(b)) = g(y) = 4$

$(g_of)(c) = g(f(c)) = g(z) = 5$

Fungsi g_of dapat digambarkan dalam gambar 4.13.



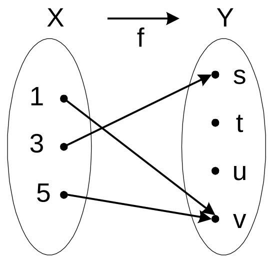
Gambar 4.13

SOAL DAN PENYELESAIANNYA

Domain, Kodomain dan Range Fungsi

Soal 4.1

Misalkan X = {1, 3, 5} dan Y = {s, t, u, v}. Didefinisikan fungsi $f : X \rightarrow Y$ yang dinyatakan dengan diagram panah gambar 4.14



Gambar 4.14

a. Tentukan Domain dan Kodomain f

b. Carilah f(1), f(3) dan f(5)

c. Apakah Range f ?

Penyelesaian

a. Domain = {1, 3, 5} dan Kodomain = {s, t, u, v}

b. f(1) = v, f(3) = s dan f(5) = v

c. Range f = {s,v}

Soal 4.2

Didefinisikan fungsi atas bilangan bulat Z sebagai berikut : $f : Z \rightarrow Z$ dengan aturan $f(n) = n^2 \ \forall n \in Z$

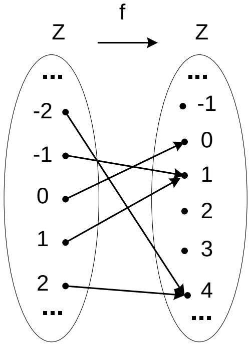
a. Gambarlah diagram panah f

b. Carilah f(2), f(f(3)), dan f(f(f(2)))

c. Carilah f(2n), 2 f(n), f(n-1), dan f(n) –1

Penyelesaian

a. Gambar 4.15 adalah diagram panah fungsi f



Gambar 4.15

b. $f(2) = 2^2 = 4$.

$f(3) = 3^2 = 9$ sehingga $f(f(3)) = f(9) = 9^2 = 81$

$f(2) = 2^2 = 4$. $f(f(2)) = f(4) = 4^2 = 16$. Maka $f(f(f(2))) = f(16) = 16^2 = 256$

c. $f(2n) = (2n)^2 = 4n^2$

$2\,f(n) = 2\,n^2$

$f(n\text{-}1) = (n\text{-}1)^2 = n^2 - 2n + 1$

$f(n)–1 = n^2 - 1$

Soal 4.3

Misalkan $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, P(A) adalah himpunan kuasa A dan Z adalah himpunan bilangan bulat. Didefnisikan fungsi $f : P(A) \rightarrow Z$ sebagai berikut :

$$\forall X \in P \;\; A \qquad f \;\; X \; = \begin{cases} 0 & jika \;\; jumlah \; anggota \; X \;\; genap \\ 1 & jika \;\; jumlah \; anggota \; X \;\; ganjil \end{cases}$$

Carilah $f(\{1, 3, 4\})$, $f(\emptyset)$, $f(\{2, 3\})$, $f(\{2, 3, 4, 5\})$

Penyelesaian

$f(\{1, 3, 4\}) = 1$ karena jumlah anggota $X = \{1,3,4\}$ adalah 3 (ganjil)

Secara analog, $f(\emptyset) = 0$; $f(\{2, 3\}) = 0$; $f(\{2, 3, 4, 5\}) = 0$

Soal 4.4

Fungsi Lantai (Floor Function) adalah fungsi f : R (riil) $\rightarrow$ R (riil) yang didefinisikan sebagai :

$f(x) = \lfloor x \rfloor =$ bilangan bulat terbesar yang kurang atau sama dengan x.

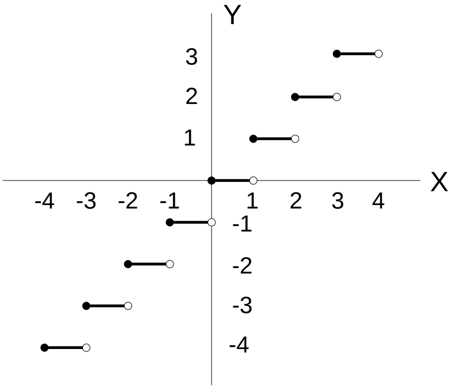
a. Carilah f(3,25) ; f(-4,79) ; f (5)

b. Gambarkan grafik fungsi f

Penyelesaian

a. f (3,25) = 3 ; f (-4,79) = -5 ; f(5) = 5

b. Grafik fungsi lantai menyerupai bentuk "tangga", seperti yang tampak pada gambar 4.16



Gambar 4.16

Soal 4.5

Fungsi jarak Hamming memberikan ukuran perbedaan/jarak antara 2 buah string biner yang memiliki panjang yang sama.

Misalkan $\Sigma = \{0,1\}$ dan Σ^n = himpunan semua string dalam Σ yang panjangnya = n

Fungsi jarak Hamming didefinisikan sebagai :

$H : \Sigma^n \times \Sigma^n \rightarrow Z^+$ (himpunan bilangan bulat positif)

H(s,t) = banyaknya posisi dimana s dan t mempunyai harga yang berbeda.

Carilah H (11111,00000) dan H (11000,00010)

Penyelesaian

- H (11111,00000) = 5 karena kedua string berbeda di semua (= 5) posisi.

- H (11000,00010) = 3 karena kedua string berbeda di 3 posisi, yaitu posisi pertama, kedua dan keempat.

Fungsi Bijektif

Soal 4.6

Misalkan $\Sigma = \{a, b\}$ dan Σ^* adalah himpunan semua string yang karakter-karakternya diambil dari Σ. Didefinisikan fungsi $f : \Sigma^* \rightarrow Z$ sebagai berikut :

Untuk setiap string s dalam Σ^*

$$f\;\;s\;=\begin{cases} jumlah\ karakter\ 'b'\ di\ kiri\ karakter\ 'a'\ paling\ kiri\ dalam\ s \\ 0\ \ jika\ s\ tidak\ memiliki\ karakter\ 'a' \end{cases}$$

a. Gambarkanlah himpunan Σ^*

b. Carilah f(aba), f(bbab), f(b).

c. Apakah Range fungsi f ?

Penyelesaian

a. Himpunan Σ^* berisi semua string yang karakternya adalah a atau b (termasuk string kosong).

   Ada sebuah string dengan panjang 0 dalam Σ^* yaitu string kosong (simbol ε)

   Ada 2 string dengan panjang 1 dalam Σ^* yaitu {'a', 'b'}

   Ada 2 string dengan panjang 2 dalam Σ^* yaitu {'aa', 'ab', 'ba', 'bb'}

   Ada 2 string dengan panjang 3 dalam Σ^* yaitu {'aaa', 'aab', 'aba', 'baa', 'abb', 'bab', 'bba', 'bbb'}.

   dan seterusnya …

   Karena panjang string tak berhingga, maka jumlah anggota Σ^* juga tak berhingga banyak

Jadi Σ^* = {ε , 'a', 'b', 'aa', 'ab', 'ba', 'bb', 'aaa', 'aab', 'aba', 'baa', 'abb', 'bab', 'bba', 'bbb', …}

b. Karakter 'a' paling kiri pada string 'aba' adalah karakter pertama. Karena merupakan karakter pertama, jelas bahwa tidak ada string lain di kirinya sehingga f(aba) = 0.

   Secara analog, karakter 'a' paling kiri pada string 'bbab' adalah karakter ketiga. Dua akrakter di kirinya adalah 'b' sehingga f(bbab) = 2

   f(b) = 0 karena string tidak memiliki karakter a

c. Ada tak berhingga banyak string yang dikawankan dengan 0, antara lain : 'b', 'bb', 'bbb', …, 'ab', 'abb', 'aba', …

   Ada tak berhingga banyak string yang dikawankan dengan 1, antara lain : 'ba', 'baab', 'baababb', …

   Dan seterusnya. Perhatikan bahwa penentu nilai fungsi adalah karakter 'a' paling kiri (dan jumlah 'b' di kirinya). Karakter di kanan karakter 'a' terkiri tidak lagi berpengaruh. f(ba) = f(baa) = f(bab) = f(baaabab) = 1

   Dengan demikian, Range f adalah himpunan bilangan cacah

Soal 4.7

Diketahui Σ = {a, b} dan Σ^* adalah himpunan semua string yang bisa dibentuk dari anggota-anggota Σ. Didefinisikan fungsi f dan g : $\Sigma^* \rightarrow$ C (bilangan cacah) dengan aturan sbb :

f(w) = max (panjang w, 5)

g(w) = jumlah 'a' + jumlah 'b' dalam w

Tentukan Range (g) - Range (f) = …….

Penyelesaian

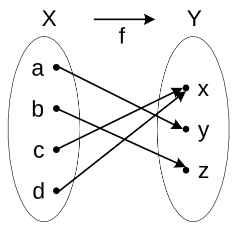
Range fungsi panjang string = {0,1,2, … }. Akan tetapi fungsi f(w) = max (panjang w, 5) akan mencari bilangan bulat yang lebih besar diantara 5 dan panjang string w. Jadi Range fungsi f(w) = {5,6, 7, …}

Karena semua string dalam Σ^* hanya berupa karakter a dan b, maka fungsi g(w) = jumlah 'a' + jumlah 'b' sama dengan fungsi panjang string. String terkecil adalah string kosong ε (jumlah 'a' = jumlah 'b' = 0). Maka Range fungsi g = {0,1,2, … }

Maka Range (g) - Range (f) = {0,1,2, … } – {5,6, 7, …} = {0,1,2,3,4}

Soal 4.8

Misalkan X = {a, b, c, d} dan Y = {x, y, z}. Didefinisikan fungsi f : X → Y yang dinyatakan dengan diagram panah gambar 4.17. Apakah f Bijektif ?



Gambar 4.17

Penyelesaian

f Surjektif karena tiap anggota Y memiliki kawan di X. Akan tetapi $x \in Y$ memiliki 2 kawan di X yaitu {c,d} sehingga f tidak Injektif.

Karena f tidak Injektif maka f tidak Bijektif

Kenyataan bahwa f tidak Bijektif dengan mudah dapat ditentukan dengan menghitung jumlah anggota X dan Y. Pada fungsi Bijektif, jumlah anggota Domain dan Kodomain selalu sama

Soal 4.9

Diketahui fungsi $f(x) = 2x+1$.

a. Jika f didefinisikan atas himpunan bilangan bulat, apakah f merupakan fungsi Bijektif ?

b. Jika f didefinisikan atas himpunan bilangan riil, apakah f merupakan fungsi Bijektif ?

Penyelesaian

Untuk mengetahui apakah f merupakan fungsi Bijektif, maka harus diuji apakah f merupakan fungsi Injektif dan Surjektif. Karena Domain maupun Kodomain merupakan himpunan yang tak terhingga, maka pengujian harus dilakukan menurut definisi fungsi Injektif/Surjektif

a. $f : Z \rightarrow Z$ dengan $f(x) = 2x+1\ \forall x \in Z$

Syarat fungsi Injektif : $(\forall x_1, x_2 \in Z)\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Ambil sembarang $x_1, x_2 \in Z$ dengan sifat $f(x_1) = f(x_2)$. Jika kemudian bisa disimpulkan bahwa $x_1 = x_2$, maka f Injektif. Tapi jika $x_1 \neq x_2$ maka f tidak Injektif.

$$f(x_1) = 2x_1+1 \quad ; \quad f(x_2) = 2x_2 + 1$$

$f(x_1) = f(x_2)$ berarti $2x_1+1 = 2x_2+1$. Didapat $2x_1 = 2x_2$ atau $x_1 = x_2$

Dari $f(x_1) = f(x_2)$ dapat diturunkan $x_1 = x_2$. Berarti bahwa f Injektif.

Syarat fungsi Surjektif : $(\forall y \in Z)\ (\exists x \in Z)\ f(x) = y$

Untuk mengecek apakah f Surjektif, ambil sembarang bilangan bulat y. Kemudian diteliti apakah ada bilangan bulat x yang dikawankan dengan y ($f(x) = y$). Jika x ada untuk sembarang y, berarti bahwa f Surjektif. Jika tidak ada, berarti f tidak Surjektif.

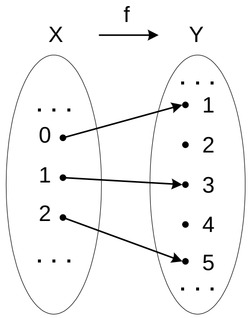
$$f(x) = y$$

$$2x+1 = y$$

$$2x = y-1$$

$$x = \frac{y-1}{2}$$

y bilangan bulat, tapi $\frac{y-1}{2}$ belum tentu bilangan bulat. Sebagai contoh, jika y = 4, maka x = $\frac{4-1}{2}$ = $\frac{3}{2}$ yang bukan bilangan bulat. Jadi untuk y bilangan genap, y tidak mempunyai kawan di Domain. (tidak ada bilangan bulat x dengan sifat f(x) = y). Kenyataan tersebut digambarkan dalam gambar 4.18. Tampak bahwa setiap bilangan genap di Kodomainnya (Y) tidak mempunyai kawan di Domain (X). Maka f tidak Surjektif, sehingga tidak Bijektif



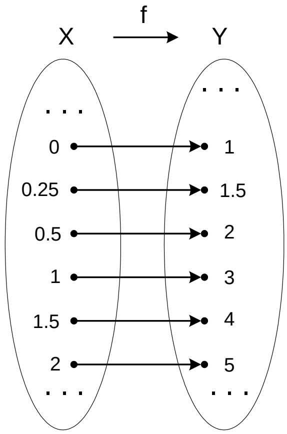
Gambar 4.18

b. $f: R \rightarrow R$ dengan $f(x) = 2x + 1 \quad \forall x \in R$

Dengan cara yang sama seperti (a), disimpulkan bahwa f Injektif.

Untuk mengecek apakah f Surjektif, dilakukan dengan cara seperti soal (a). Kawan dari y $\in$ R adalah x = $\frac{y-1}{2}$. Akan tetapi karena y $\in$ R maka x = $\frac{y-1}{2}$ juga bilangan riil, sehingga merupakan anggota Domainnya. Hal ini dapat dilihat pada gambar 4.19.

Tampak bahwa sekarang setiap anggota Kodomain mempunyai kawan di Domain, sehingga disimpulkan bahwa f Surjektif.



Gambar 4.19

Karena f Injektif dan Surjektif, maka f merupakan fungsi yang Bijektif.

Soal 4.9 menunjukkan bahwa sifat Injektif/Surjektif suatu fungsi tidak hanya ditentukan oleh cara perkawanan fungsi (rumus eksplisit), tetapi juga ditentukan oleh Domain dan Kodomainnya.

Soal 4.10

Suatu fungsi g didefinisikan pada himpunan bilangan bulat Z dengan rumus $g : Z \to Z$ dengan $g(n) = n^2 \quad \forall n \in Z$.

a. Apakah g Injektif ? Surjektif ?

b. Apakah g juga Injektif/Surjektif jika g didefinisikan pada himpunan bilangan riil R ?

Penyelesaian

a. $g : Z \to Z$ dengan $g(n) = n^2, \quad \forall n \in Z$

Syarat fungsi Injektif : $(\forall n_1, n_2 \in Z)\ g(n_1) = g(n_2) \Rightarrow n_1 = n_2$

Ambil sembarang n_1 dan $n_2 \in Z$ dengan sifat $g(n_1) = g(n_2)$. Akan dilihat apakah persamaan ini akan menghasilkan $n_1 = n_2$.

$$\begin{aligned} g(n_1) &= g(n_2) \\ n_1^2 &= n_2^2 \\ n_1^2 - n_2^2 &= 0 \\ (n_1+n_2)(n_1-n_2) &= 0. \end{aligned}$$

Didapatkan hasil $n_1 = n_2$ atau $n_1 = -n_2$

Jadi ada 2 bilangan bulat yang menghasilkan $g(n_1) = g(n_2)$. Sebagai contoh, kawan dari $g(n_1) = g(n_2) = 4$ adalah $n_1 = 2$ dan $n_2 = -2$ Disimpulkan bahwa g tidak Injektif.

Syarat fungsi Surjektif : $(\forall y \in Z)(\exists n \in Z)\ g(n) = y$

$$\begin{aligned} g(n) &= y \\ n^2 &= y \\ n &= \sqrt{y} \end{aligned}$$

y bilangan bulat. Tetapi $\sqrt{y}$ belum tentu merupakan bilangan bulat. Sebagai contoh, untuk y = 2, maka n = $\sqrt{2}$ yang bukan $\in$ Z. Jadi g tidak Surjektif.

b. Jika fungsi g yang sama didefinisikan pada bilangan riil :

$g : R \rightarrow R$ dengan $g(x) = x^2 \quad \forall x \in R$

g tidak Injektif dengan alasan yang sama seperti jawaban (a).

g juga tidak Surjektif. Untuk $y=-1 \in R$, maka $\sqrt{y} \notin R$.

Soal 4.11

Untuk tiap soal berikut ini, tentukan apakah fungsi yang didefinisikan merupakan fungsi yang Injektif, Surjektif, atau bukan keduanya (N =

bilangan asli, C = bilangan cacah dan R = bilangan Riil). Jika ya, buktikanlah. Jika tidak, berikan contoh penyangkalnya.

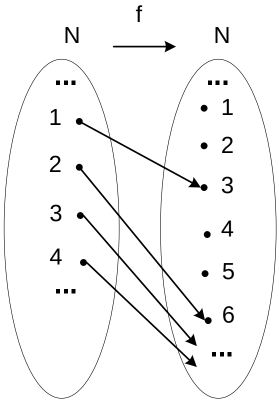
a. $f : N \to N$ dengan $f(n) = n^2+2 \quad \forall n \in N$

b. $f : C \to C$ dengan $f(n) = n \bmod 3 \quad \forall n \in C$

c. $f : R \to R$ dengan $f(x) = |x| \quad \forall x \in R$

Penyelesaian

a. Fungsi $f : N \to N$ dengan $f(n) = n^2+2$ dapat digambarkan dalam diagram panah seperti yang tampak pada gambar 4.20a

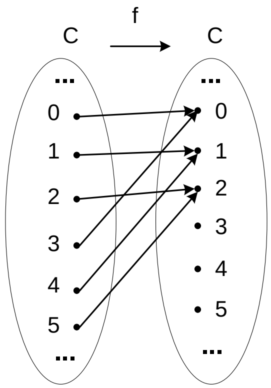


Gambar 4.20a

Seperti yang tampak pada gambar 4.20a, nilai fungsi f selalu naik. Tidak ada anggota Kodomain yang memiliki kawan yang sama di Domainnya. Jadi f Injektif.

f tidak Surjektif. Ambil anggota Kodomain f(n)=4. Persamaan $n^2+2 = 4$ akan dipenuhi oleh $n = \sqrt{2}$. Akan tetapi $\sqrt{2}$ bukan bilangan asli sehingga f(n) = 4 tidak memiliki kawan di Domain bilangan asli (lihat gambar 4.20a)

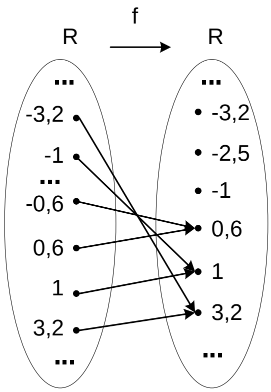
b. Fungsi $f : C \to C$ dengan $f(n) = n \bmod 3$ dapat digambarkan dalam diagram panah seperti yang tampak pada gambar 4.20b f jelas tidak Injektif karena ada banyak bilangan cacah yang memiliki nilai fungsi yang sama. Sebagai contoh n=1,4, 7, … akan memiliki nilai fungsi f(1) = f(4) = f(7) = … = 1 (lihat gambar 4.20b)



Gambar 4.20b

f juga tidak Surjektif karena berapapun nilai n yang diberikan, fungsi f(n) = n mod 3 hanya akan menghasilkan nilai fungsi 0, 1, atau 2. Ini berarti bahwa anggota Kodomain yang lain (misal n=3, 4, 5, …) tidak akan memiliki kawan di Domainnya

c. Fungsi $f : R \rightarrow R$ dengan $f(x) = |x|$ dapat digambarkan dalam diagram panah seperti yang tampak pada gambar 4.20c



Gambar 4.20c

Fungsi harga mutlak f(x) = |x| tidak Injektif karena setiap pasang bilangan riil akan memiliki harga mutlak yang sama. f(-1)=f(1)=1, f(-0,6)=f(0,6)=0,6, f(-3,2)=f(3,2)=3,2, dan seterusnya.

Dengan Kodomain himpunan bilangan riil, fungsi f(x)=|x| tidak Surjektif karena anggota Kodomain yang memiliki kawan di Domain hanyalah bilangan tidak negatif saja. Fungsi f(x) = |x| akan Surjektif apabila Kodomainnya adalah himpunan bilangan riil positip (R+)

Soal 4.12

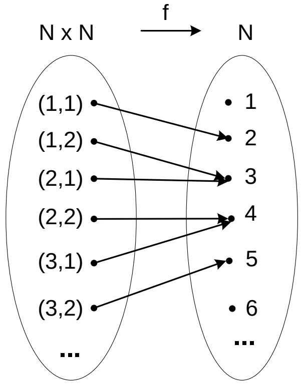
Misalkan N adalah himpunan bilangan asli. Fungsi $f : N \times N \rightarrow N$ didefinisikan dengan rumus f(x,y) = x + y.

a. Nyatakan fungsi f dalam diagram panah

b. Apakah fungsi f Injektif ?

Penyelesaian

a. Domain fungsi berupa pasangan bilangan asli, seperti yang tampak pada gambar 4.21



Gambar 4.21

b. Tampak dari gambar 4.21 bahwa fungsi f tidak Injektif. f(1,2)=f(2,1)=3, f(1,3)=f(2,2)=f(3,1)=4 dan seterusnya

Soal 4.13

Misalkan S = {1, 2, 3, 4, 5}. Relasi f, g, dan h : S→S didefinisikan sbb :

$$f(n) = \text{Min}\{3, n\}$$

$$g(n) = \text{Max}\{1, n-5\}$$

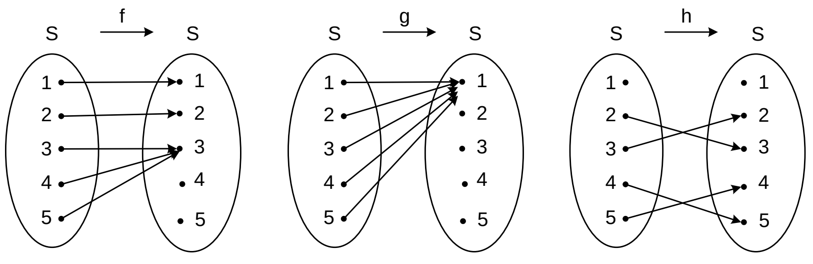
$$h(n) = n + (-1)^n$$

a. Mana diantara ketiga relasi tersebut yang merupakan fungsi ?

b. Mana diantara ketiga relasi tersebut yang merupakan fungsi Injektif ? Surjektif ?

Penyelesaian

a. Gambar 4.22 menunjukkan relasi f,g dan h. Tampak bahwa relasi f dan g merupakan fungsi. Relasi h bukan fungsi karena h(1)=0 $\notin$ S sehingga elemen 1 $\in$ Domain tidak memiliki kawan



Gambar 4.22

b. Dengan melihat gambar 4.22, tampak bahwa f tidak Injektif karena f(3)=f(4)=f(5)=3. Fungsi g juga tidak Injektif karena g(1)=…=g(5)=1

Fungsi f tidak Surjektif karena ada anggota Kodomain yang tidak memiliki kawan (4 dan 5). Fungsi g juga tidak Surjektif karena anggota Kodomain yang punya kawan hanyalah 1

Soal 4.14

Fungsi f : $Z \rightarrow Z$ ditentukan dengan aturan

$$f(j) = \begin{cases} j/2 & \text{jika } j \text{ genap} \\ (j-1)/2 & \text{jika } j \text{ ganjil} \end{cases}$$

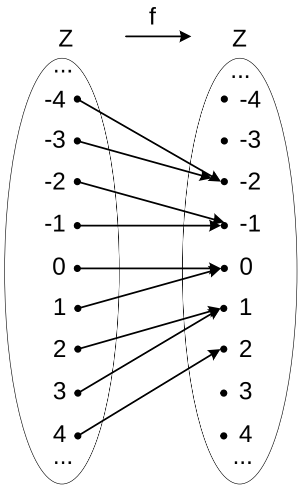
a. Tentukan Range f

b. Berapa banyak anggota Domain yang dikawankan dengan 0 ?

c. Apakah fungsi f merupakan fungsi yang Bijektif ?

Penyelesaian

Untuk lebih memahami fungsi f, fungsi terlebih dahulu dinyatakan dalam diagram panah seperti yang tampak pada gambar 4.23.



Gambar 4.23

a. Jika perkawanan pada gambar 4.23 digambarkan untuk semua anggota Domain Z, maka Range akan meliputi semua himpunan bilangan bulat Z.

b. Anggota Domain yang dikawankan dengan 0 ada 2 buah yaitu 0 dan 1

c. f Surjektif karena semua anggota Kodomain memiliki kawan. Akan tetapi f tidak Injektif karena setiap anggota Kodomain memiliki 2 kawan di Domainnya. Karena f tidak Injektif, maka f tidak Bijektif

Soal 4.15

Diketahui A = {a, b, c} dan P(A) = himpunan kuasa himpunan A. Fungsi f : P(A) $\rightarrow$ Z (himpunan bilangan bulat) didefinisikan dengan aturan :

$$\left(\forall X \in P(A)\right) \ f(X) = \text{banyaknya anggota } X$$

a. Tentukan Domain, Kodomain, dan Range fungsi f

b. Nyatakan fungsi f dalam diagram anak panah

c. Apakah f Injektif (one-to-one) ?

d. Apakah f Surjektif (onto) ?

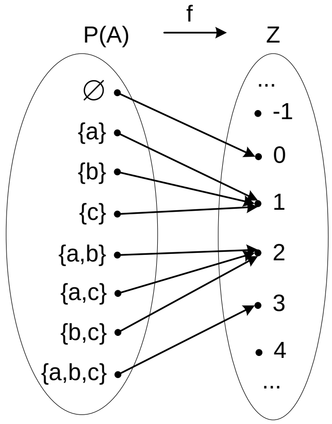
Penyelesaian

a. Domain fungsi f adalah P(A) = {$\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c}, {b,c}, {a,b,c} }.

   Kodomain fungsi f adalah himpunan bilangan bulat Z

   Karena maksimum anggota P(A) terdiri dari 3 elemen, maaka Range fungsi f = {0, 1, 2, 3}

b. Fungsi f dinyatakan dengan diagram anak panah seperti yang tampak pada Gambar 4.24



Gambar 4.24

c. f tidak Injektif karena elemen $1 \in Z$ memiliki 3 kawan di P(A) yaitu {a}, {b, dan {c}. Demikian pula $2 \in Z$ juga memiliki 3 kawan di P(A)

d. f juga tidak Surjektif karena anggota Z yang memiliki kawan di P(A) hanyalah {0, 1, 2, 3} saja. Elemen Z lain seperti 4, 5, .. -1, -2, … tidak memiliki kawan di P(A)

Soal 4.16

Dalam sebuah kelompok yang terdiri dari 2000 orang, apakah pasti ada paling sedikit 6 orang yang berulang tahun pada hari yang sama ?

Penyelesaian

Jumlah hari dalam 1 tahun paling banyak adalah 366 hari. Jika tiap hari ada 5 orang yang berulang tahun, maka dibutuhkan 366 x 5 = 1830 orang. Padahal jumlah anggota kelompok ada 2000 orang. Berarti pasti ada 6 orang atau lebih diantaranya yang berulang tahun pada hari yang sama.

Soal 4.17

Bilangan rasional didefinisikan sebagai $\frac{p}{q}$ dengan p dan q bilangan bulat. Jika $\frac{p}{q}$ diekspansikan dalam bentuk desimal $x,d_1d_2d_3...$ maka ada dua macam kemungkinan angka-angka desimalnya

a. Desimal akan berhenti. Sebagai contoh $\frac{11}{8}$ = 1.375

b. Desimal tidak berhenti, tapi akan berulang. Sebagai contoh, $\frac{3}{14}$ = 0,2142857142857…Tampak bahwa desimal 142857 muncul berulang-ulang.

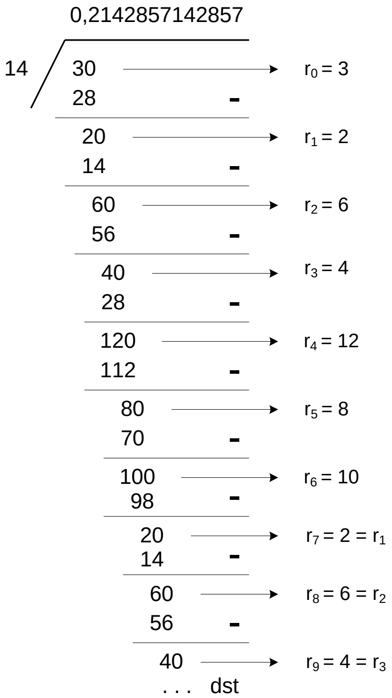
Buktikan fakta yang kedua !

Penyelesaian

Misalkan r_0 = a dan $r_1, r_2, ..., r_k, ...$ adalah sisa pembagian desimal $\frac{a}{b}$. Sebagai contoh, harga r_i dalam pembagian $\frac{3}{14}$ tampak pada gambar 4.25a

Pada pembagian $\frac{a}{b}$, sisa pembagian haruslah terletak antara 0 hingga (b-1). Jadi $0 \leq r_i \leq (b-1)$ (dalam contoh $\frac{3}{14}$ di atas, sisa pembagian terletak antara 0 hingga 13)

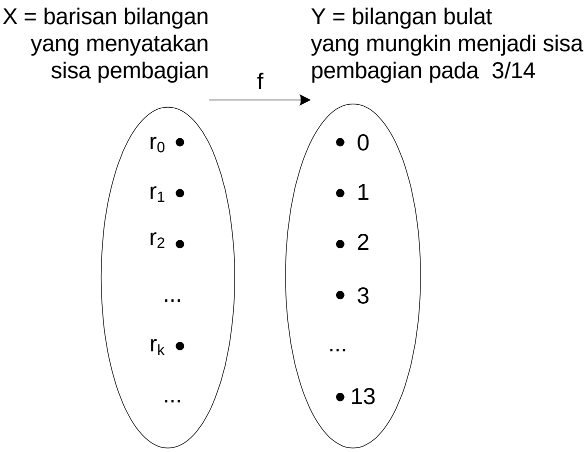
Dengan menggunakan prinsip kandang merpati, merpati diibaratkan sebagai barisan sisa pembagian (r_1, r_2, ...). Sebagai kandang merpati diambil bilangan-bilangan bulat yang mungkin menjadi sisa pembagian. Pada kasus $\frac{3}{14}$, ada 14 buah "kandang merpati", dari 0 hingga 13, seperti gambar 4.25b



Gambar 4.25 a

Fungsi f dibuat dari X (sebagai sisa hasil bagi : r_0, r_1 , r_2 ...) ke Y yang memiliki 14 anggota (0, 1, …, 13) sebagai bilangan yang mungkin menjadi sisa pembagian seperti yang tampak pada gambar 4.25b. Karena desimal tidak berhenti, maka jumlah anggota X tak berhingga banyak. Didapat $|X| > |Y|$. Berarti pasti ada paling sedikit 2 buah sisa pembagian (sebutlah r_j dan r_k) yang mempunyai kawan yang sama di $y \in Y$. Jadi $r_j = r_k$ untuk suatu $j < k$. Ini berarti bahwa $r_{j+1} = r_{k+1}$; $r_{j+2} = r_{k+2}$; ... ; $r_{k-1} = r_{2k-(j+1)}$. Digit-digit desimal antara r_j dan r_k akan selalu berulang.

Dalam contoh $\frac{3}{14}$, digit-digit r_1 hingga r_6 berulang karena $r_1 = r_7$, sehingga $r_2 = r_8$; $r_3 = r_9$; ... ; $r_6 = r_{12}$.



Gambar 4.25 b

Invers Fungsi

Soal 4.18

Fungsi f : R$\rightarrow$R didefinisikan dengan rumus f(x) = x^3-2. Apakah fungsi f^{-1} ada ? Carilah f^{-1} jika ada

Penyelesaian

Syarat f memiliki invers adalah f merupakan fungsi Bijektif. Karena fungsinya melibatkan himpunan-himpunan tak berhingga, maka pembuktian apakah f merupakan fungsi Bijektif dilakukan secara analitik.

Injektif :

Ambil 2 anggota Kodomain y_1 dan $y_2 \in$ R dengan $y_1 = y_2$.

$y_1 = f \;\; x_1 \;\; = x_1^3 - 1$ dan $y_2 = f \;\; x_2 \;\; = x_2^3 - 1$.

$y_1 = y_2$ berarti $x_1^3 - 1 = x_2^3 - 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; x_1^3 = x_2^3 \;\; \Leftrightarrow \;\; x_1 = x_2$

Dari $y_1 = y_2$ dapat diturunkan $x_1 = x_2$. Berarti f Injektif.

Surjektif :

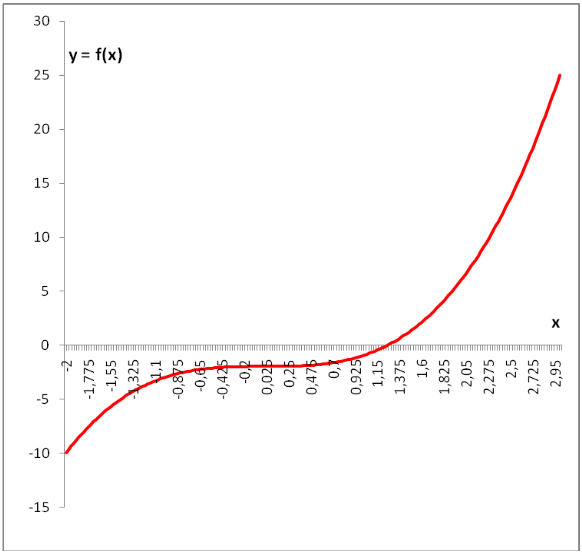
Ambil sembarang anggota Kodomain (=y). Akan diteliti apakah ada x yang merupakan kawan dari y.

$$y = f(x) = x^3 - 1$$

$$x = \sqrt[3]{y+1}$$

Jadi untuk tiap y yang kita ambil, kita dapat menemukan $x = \sqrt[3]{y+1}$ yang merupakan kawan dari y, sehingga f merupakan fungsi yang Surjektif.

Karena f Injektif dan Surjektif, maka f merpakan fungsi yang Bijektif dengan $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$.



Gambar 4.26

Kenyataan bahwa f adalah fungsi yang Bijektif juga dapat diketahui secara visual lewat grafiknya, seperti yang tampak pada gambar 4.26. Kenyataan bahwa f merupakan fungsi dapat dibuktikan sebagai berikut : Ambil sembarang x. Tarik garis vertikal hingga memotong grafik. Perpotongan ini tunggal. Berarti untuk tiap x, hanya ada 1 nilai y yang merupakan pasangannya.

Sebaliknya, kenyataan bahwa f merupakan fungsi Bijektif dapat dibuktikan sebagai berikut : Ambil sembarang y. Tarik garis horisontal hingga memotong grafik. Perpotongan ini tunggal. Berarti untuk tiap y yang kita ambil, hanya ada 1 nilai x yang merupakan pasangannya.

Soal 4.19

Z_6 = {0, 1, 2, …. , 5}. Fungsi $f : Z_6 \rightarrow Z_6$ didefinisikan dengan rumus $f(n) = (n^2+5) \bmod 6$

Apakah f mempunyai invers ?

Penyelesaian

$f(0) = (0^2+5) \bmod 6 = 5$

$f(1) = (1^2+5) \bmod 6 = 0$

$f(2) = (2^2+5) \bmod 6 = 3$

$f(3) = (3^2+5) \bmod 6 = 2$

$f(4) = (4^2+5) \bmod 6 = 3$

$f(5) = (5^2+5) \bmod 6 = 0$

Tampak bahwa f(2) = f(4) = 3 dan f(1) = f(5) = 0 sehingga f tidak Injektif

Tampak bahwa 1 dan 4 bukan anggota Range (tidak ada anggota Domain yang kawannya adalah 1 atau 4), sehingga f tidak Surjektif.

Jadi f tidak Injektif dan tidak Surjektif sehingga f tidak Bijektif. Berarti f tidak memiliki invers.

Soal 4.20

Fungsi round adalah fungsi pembulatan bilangan riil ke bilangan bulat terdekat. round (4,5) = 5 ; round (6, 276) = 6 dan seterusnya g adalah fungsi R^+ (riil positif) $\rightarrow$ C (bilangan cacah) yang didefinisikan dengan aturan g(x) = round (x)

Apakah g^{-1} ada ?

Penyelesaian

Round (4,1) = round (4,3) = round (3,7) = … = 4. Berarti 4 $\in$ Range(g) memiliki banyak kawan di Domainnya, sehingga g tidak Injektif.

Karena g tidak Injektif (berarti g juga tidak Bijektif), maka g^{-1} tidak ada.

Soal 4.21

Diketahui $\Sigma = \{a, b\}$ dan Σ^* adalah himpunan semua string yang bisa dibentuk dari anggota-anggota Σ. Didefinisikan fungsi f dan g : $\Sigma^* \rightarrow$ C (bilangan cacah) dengan aturan sbb :

f(w) = jumlah 'a' dalam w ; g(w) = panjang w

a. Tentukan f ('bbb'), f('abab'), g('abbba'), g('ab').

b. Tentukan string yang dikawankan dengan bilangan 2 oleh fungsi g

c. Apakah f dan g memiliki invers ?

Penyelesaian

a. Ilustrasi anggota Σ^* dapat dilihat pada soal 4.6

   f ('bbb') = 0 ; f('abab') = 2 ; g('abbba') = 5 ; g('ab') = 2

b. String yang dikawankan dengan 2 oleh fungsi g adalah string yang panjangnya = 2, yaitu string 'aa', 'ab', 'ba', 'bb'

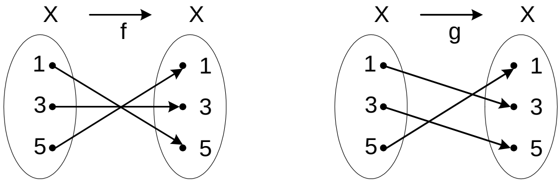
c. f jelas tidak Injektif. Sebagai contoh penyangkal, f('a') = f('ab') = f('abb') = f('ba') = … = 1. Karena tidak Injektif, maka f tidak Bijektif. Akibatnya f tidak memiliki invers.

   g juga tidak Injektif. Sebagai contoh penyangkal, g('aa') = g('ab') = g('ba') = g('bb') = 2 Karena tidak Injektif, maka g tidak Bijektif. Akibatnya g tidak memiliki invers

Komposisi Fungsi

Soal 4.22

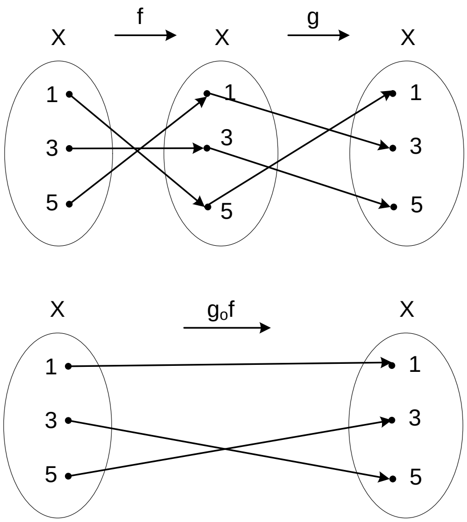
Fungsi f dan g didefinisikan dengan diagram panah seperti gambar 4.27. Carilah $g_o f$ dan $f_o g$. Apakah $g_o f = f_o g$?



Gambar 4.27

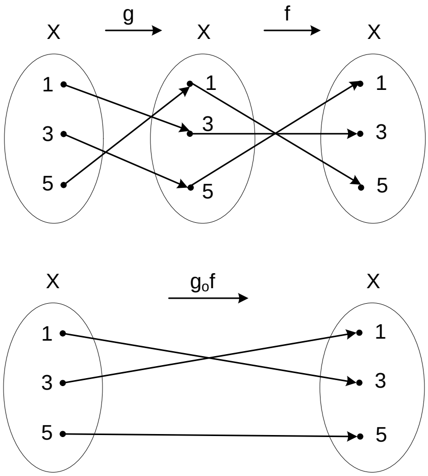
Penyelesaian

Gambar 4.28a atas adalah diagram panah yang merupakan gabungan dari diagram panah fungsi f dan g. Gambar 4.28a bawah merupakan diagram panah untuk $g_o f$. Perhatikan bahwa



Gambar 4.28a

Secara analog, diagram panah $f_o g$ dinyatakan dalam gambar 4.28b bagian bawah. Tampak bahwa $g_o f \neq f_o g$



Gambar 4.28b

Soal 4.23

Misalkan f, g, dan h adalah fungsi-fungsi yang didefinisikan pada himpunan bilangan riil dengan $f(x) = x + 2$; $g(x) = x-2$; $h(x) = 3x$ $\forall x \in R$. Carilah $g_o f$; $f_o g$; $f_o f$; $f_o h$; $h_o g$; $h_o f$; $f_o h_o g$

Penyelesaian

$g_o f(x) = g(f(x)) = g(x+2) = (x+2)-2 = x$

$f_o g(x) = f(g(x)) = f(x-2) = (x-2)+2 = x$

$f_o f(x) = f(f(x)) = f(x+2) = (x+2)+2 = x+4$

$f_o h(x) = f(h(x)) = f(3x) = 3x+2$

$h_o g(x) = h(g(x)) = h(x-2) = 3(x-2) = 3x-6$

$h_o f(x) = h(f(x)) = h(x+2) = 3(x+2) = 3x+6$

$f_o h_o g(x) = f_o h(g(x)) = f_o h(x-2) = f(3(x-2)) = f(3x-6) = (3x-6)+2 = 3x-4$

Soal 4.24

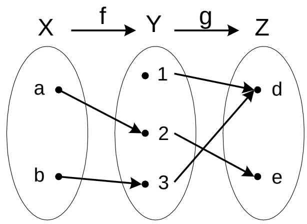
Misalkan $f : X \to Y$ dan $g : Y \to Z$ adalah fungsi, dan misalkan pula komposisi fungsi $(g \circ f) : X \to Z$ adalah fungsi yang Injektif. Apakah f dan g Injektif ?

Penyelesaian

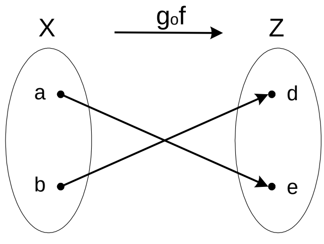
Implikasi sifat fungsi Injektif menyatakan bahwa

$$f \text{ dan } g \text{ Injektif} \Rightarrow (g \circ f) \text{ Injektif.}$$

Tapi implikasi sebaliknya belum tentu berlaku, seperti halnya contoh fungsi f dan g pada gambar 4.29a, dan komposisi $g \circ f$ pada gambar 4.29b. Fungsi $g \circ f$ pada gambar 4.29b merupakan fungsi yang Injektif, tapi g bukanlah fungsi yang Injektif karena $d \in Z$ mempunyai dua kawan di Y.



Gambar 4.29a



Gambar 4.29b

Soal 4.25

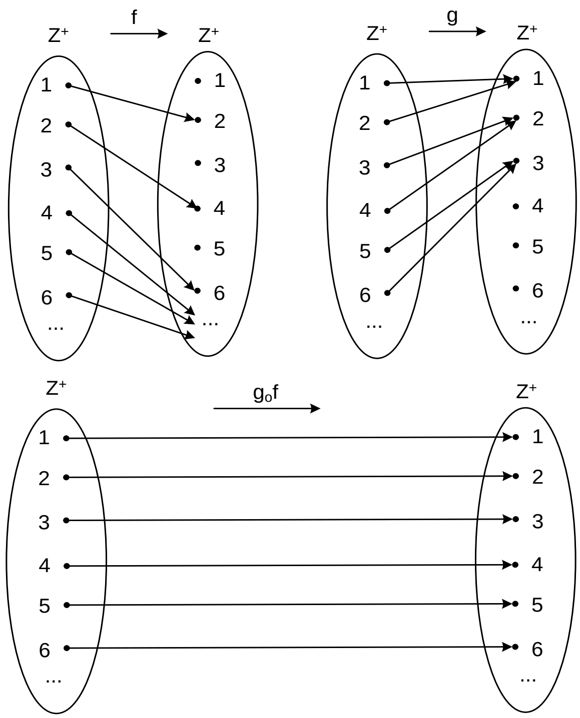
Fungsi f dan g : $Z^+ \rightarrow Z^+$ didefinisikan dengan rumus :

$$f(n) = 2n. \quad \text{dan} \quad g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{jika n genap} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{jika n gasal} \end{cases}$$

Tentukan $g_o f$ dan $f_o g$

Penyelesaian

Untuk mempermudah pemahaman, fungsi f, g, dan $g_o f$ digambarkan dengan diagram panah pada gambar 4.30. $f_o g$ digambarkan pada gambar 4.31



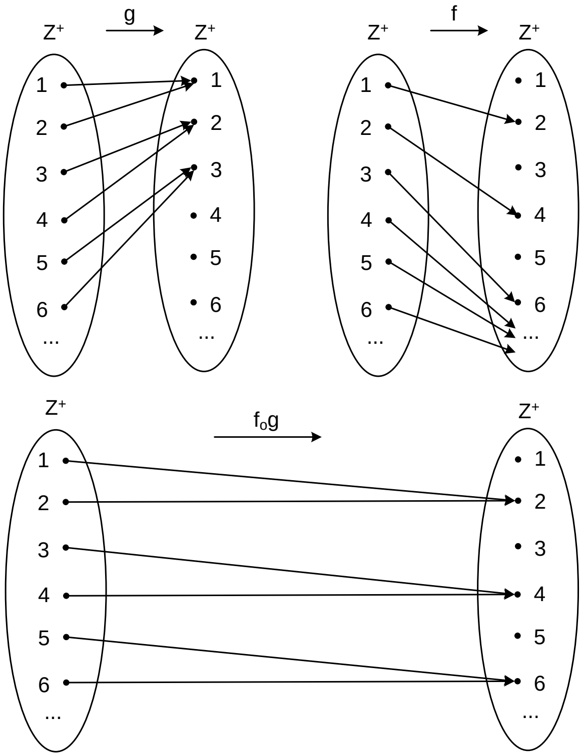
Gambar 4.30

Karena Domain dan Kodomain merupakan himpunan tak berhingga, maka komposisi fungsi akan dicari secara analitik.

Fungsi f mengawankan n dengan 2n. Berapapun nilai n, nilai 2n selalu menghasilkan bilangan genap. Maka komposisi $g_o f$ hanya dikenakan pada n yang genap.

$g_o f(n) = g(f(n)) = g(2n) = \frac{2n}{2} = n$ karena 2n selalu merupakan bilangan genap

Jadi $g_o f(n)$ menghasilkan fungsi identitas. $g_o f(n) = n$, seperti yang tampak pada gambar 4.30



Gambar 4.31

$$f_o g(n) = f(g(n)) = f\left(\begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{jika n genap} \\ \dfrac{n+1}{2} & \text{jika n gasal} \end{cases}\right)$$

$$= \begin{cases} 2\left(\dfrac{n}{2}\right) & \text{jika n genap} \\ 2\left(\dfrac{n+1}{2}\right) & \text{jika n gasal} \end{cases} = \begin{cases} n & \text{jika n genap} \\ n+1 & \text{jika n gasal} \end{cases}$$

Soal 4.26

Misalkan A = {a, b, c, d} dan P(A) adalah himpunan kuasa A dan C adalah himpunan bilangan cacah. Didefinisikan fungsi

$f : P(A) \rightarrow C$ dengan f(X) = Jumlah elemen dalam P(A)

$g : C \rightarrow C$ dengan aturan : g(n) = Min {2, n}

a. Berapa jumlah anggota Domain g ?

b. Carilah ($g_o f$) ({a, b, c})

c. Tentukan Range ($g_o f$)

d. Berapa jumlah anggota Range ($g_o g$) ?

e. Apakah f memiliki invers ? Jika memiliki, tentukan $f^{-1}(n)$. Jika tidak memiliki invers, jelaskan alasannya

Penyelesaian

a. Fungsi $g : C \rightarrow C$ memiliki Domain himpunan bilangan Cacah. Jadi jumlah anggotanya tak berhingga

b. ($g_o f$) ({a, b, c}) = g (f({a, b, c})) = g(3) = min {2,3} = 2

c. Jika A = {a,b,c,d}, maka P(A) memiliki jumlah anggota antara 0 hingga 4 sehingga Range fungsi f = {0,1,2,3,4}

Karena fungsi g(n) = Min {2, n}, maka fungsi ($g_o f$) akan memiliki Range = {0,1,2}

d. Fungsi g memiliki Range = {0,1,2}. Maka Range ($g_o g$) = {0,1,2} juga

e. f tidak Injektif. Sebagai salah satu contoh penyangkal, f({a,b}) = f({a,c}) = … = f({c,d}) = 2. Karena f tidak Injektif, maka f tidak Bijektif sehingga f tidak memiliki invers

Soal 4.27

Diketahui fungsi f, g, h : C $\rightarrow$ C (Cacah) dengan aturan sbb :

f(n) = n mod 3

g(n) = n + 2

$$h(n) = \begin{cases} n+1 & jika\ \ n\ \ genap \\ n-1 & jika\ \ n\ \ ganjil \end{cases}$$

a. Berapa jumlah anggota Range fungsi f ?

b. Tentukan $f \circ f \circ f\ \ (n)$

c. Apakah Range fungsi $h \circ h$? $f \circ g$?

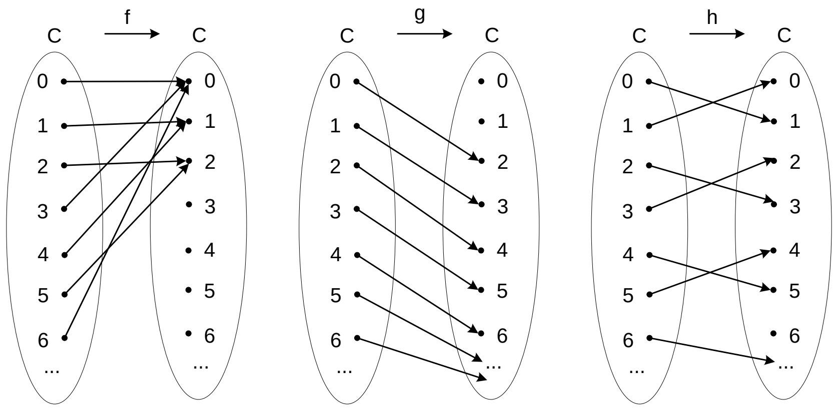
d. Diantara ketiga fungsi tersebut, mana yang merupakan fungsi Bijektif ?

Penyelesaian

Gambar 4.32 menunjukkan diagram panah untuk fungsi f, g dan h

a. Range f = {0,1,2} sehingga jumlah anggota Range fungsi f adalah 3

b. Tampak pada gambar 4.32 bahwa f(0)=0, f(1)=1, f(2)=2. Maka $f_o f$ = f sehingga $f_o f_o f$ = $f_o f$ = f

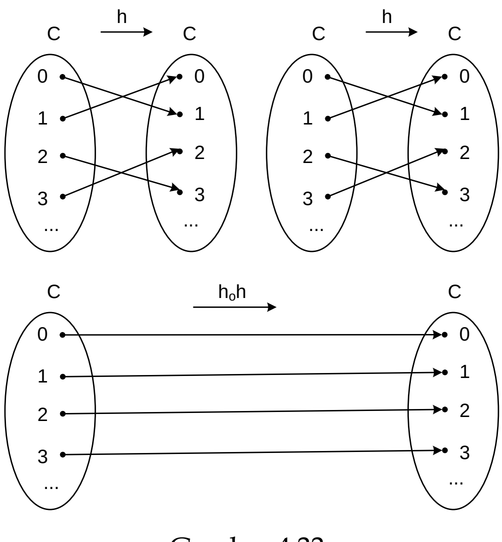


Gambar 4.32

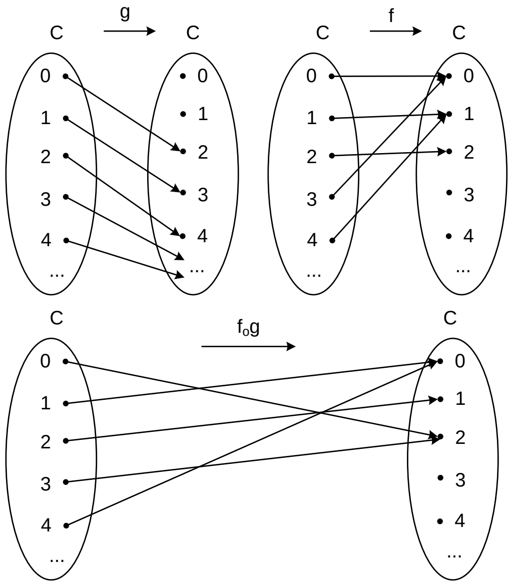
c. Komposisi fungsi h_oh dan f_og dapat digambarkan dengan diagram panah seperti pada gambar 4.33a dan 4.33b.

   Tampak bahwa komposisi fungsi h_oh menghasilkan fungsi identitas sehingga Range (h_oh) adalah himpunan bilangan cacah.

   Range (f_og) = Range f = {0,1,2}



Gambar 4.33a



Gambar 4.33b

d. Dilihat dari gambar 4.32, fungsi f tidak Injektif (0∈ Range(f) memiliki lebih dari 1 kawan di Domain), dan tidak Surjektif juga (4∈ Kodomain(f) tidak memiliki kawan di Domain)

   Fungsi g Injektif tapi tidak Surjektif (0∈ Kodomain(f) tidak memiliki kawan di Domain)

   Fungsi h merupakan fungsi Bijektif sehingga memiliki invers yaitu

$$h^{-1}(n) = \begin{cases} n+1 & jika \;\; n \;\; genap \\ n-1 & jika \;\; n \;\; ganjil \end{cases}$$

Soal 4.28

Diketahui Σ = {a, b, c} dan Σ^* adalah himpunan semua string yang bisa dibentuk dari anggota-anggota Σ. Didefinisikan fungsi f dan g : $\Sigma^* \to$ C (bilangan cacah) dengan aturan sbb :

f(w) = panjang string w

$g(w)$ = jumlah 'a' + jumlah 'b' dalam string w

Fungsi $h : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ dengan aturan $h(w) = w^R$ (string w yang dibaca dari belakang).

a. Tentukan h('babbc')

b. Berapa jumlah anggota Domain f yang dikawankan dengan 4 ?

c. Berapa jumlah anggota Range fungsi g ?

d. Tentukan $(g \circ h)$ ('bbc')

e. Apakah $f \circ h = f$? $h \circ h = h$? $f = g$?

f. Mana diantara ketiga fungsi tersebut yang memiliki invers ?

Penyelesaian

a. h('babbc') = 'cbbab'

b. Anggota Domain yang dikawankan dengan 4 oleh fungsi f adalah himpunan semua string dalam Σ^* yang panjangnya 4, seperti 'aaaa', 'aaab', 'aaac', … 'cccc'. Karena jumlah anggota Σ =3, maka jumlah string dalam Σ^* yang panjangnya 4 adalah 3*3*3*3 = 3^4 = 81 buah string

c. String ε, 'a', 'aa', 'aaa', … $\in \Sigma^*$. Berarti jumlah anggota Σ^* tak berhingga banyak, sehingga Range fungsi g adalah himpunan bilangan cacah.

d. $(g \circ h)$ ('bbc') = g(h('bbc')) = g('cbb') = 0+2 = 2

e. Ambil sembarang $w \in \Sigma^*$.

- $f(w)$ = panjang string w = $|w|$

  $(f_o h)(w) = f(h(w)) = f(w^R) = |w|$ karena panjang string w = panjang string w^R

  Maka $(f_o h)(w) = f(w) = |w|$ sehingga $f_o h = f$

- $h(w) = w^R$

$(h_o h)(w) = h(h(w)) = h(w^R) = (w^R)^R = w$. Berarti $h_o h$ merupakan fungsi identitas.

$h(w) = w^R$, sedangkan $(h_o h)(w) = w$. Berarti $(h_o h) \neq h$

- $f \neq g$ karena ada kemungkinan string mengandung karakter 'c'. Sebagai contoh, jika w = 'aacb', maka f(w) = 4 sedangkan g(w) = 2+1 = 3

f. f dan g jelas tidak Injektif karena terdapat lebih dari satu string yang panjangnya sama. Berarti f dan g tidak Bijektif sehingga tidak memiliki invers.

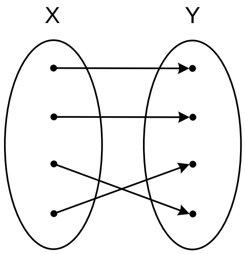
Ambil sembarang $w^R \in \Sigma^*$.

Kawan dari w^R di Domain adalah string w (tunggal). Berarti Fungsi h Injektif. Kawan w^R juga pasti ada karena setiap string pasti dapat dibaca dari belakang. Berarti h Surjektif.

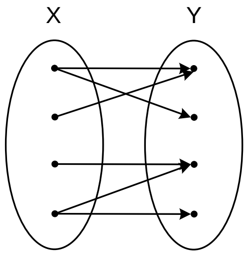
Jadi h merupakan fungsi Bijektif dan memiliki invers. $h^{-1}(w) = w^R$

SOAL-SOAL TAMBAHAN

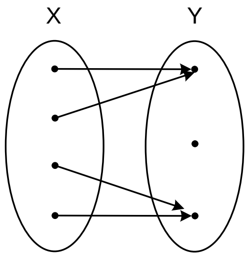
1. Tentukan apakah relasi yang dinyatakan dalam diagram panah berikut ini merupakan fungsi dari himpunan X ke himpunan Y. Jikalau bukan fungsi, jelaskan alasannya.



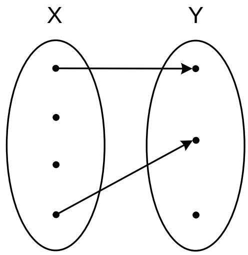
(a)



(b)



(c)



(d)

2. Didefinisikan fungsi h dan k pada himpunan bilangan riil sebagai berikut : $\forall n \in R$ h(x) = $\lfloor x \rfloor + 1$; k(x) = $\lceil x \rceil$

   $\lfloor x \rfloor$ dan $\lceil x \rceil$ masing-masing adalah fungsi lantai (pembulatan ke bawah) dan fungsi atap (pembulatan ke atas). Apakah h = k ? Jelaskan !

3. Misalkan X = {1, 5, 9} dan Y = {3, 4, 7}

   a. Didefinisikan fungsi f : X → Y dengan f(1) = 4, f(5) = 7 dan f(9) = 4. Apakah f Injektif ? Surjektif ? Bijektif ?

b. Didefinisikan fungsi $g : X \rightarrow Y$ dengan $g(1) = 7$, $g(5) = 3$ dan $g(9) = 4$. Apakah g Injektif ? Surjektif ? Bijektif ?

4. Misalkan $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ dan $Z = \{1, 2\}$

   a. Buatlah fungsi $f : X \rightarrow Y$ yang Injektif tapi tidak Surjektif

   b. Buatlah fungsi $g : X \rightarrow Z$ yang Surjektif tapi tidak Injektif

   c. Buatlah fungsi $h : X \rightarrow X$ yang tidak Injektif dan tidak Surjektif

   d. Buatlah fungsi $k : X \rightarrow X$ yang Injektif dan Surjektif tapi bukan fungsi identitas

5. Diketahui $A = \{a, b, c\}$ dan $B = \{0, 1, 2, 3\}$. Didefinisikan relasi f, g, dan h dari P(A) (Power set A) ke B dengan aturan sebagai berikut

   f(X) = jumlah elemen dalam X

   g(X) = jumlah elemen 'a' dalam X

   h(X) = jumlah eleman dalam A-X.

   a. Mana diantara relasi f, g, dan h, yang merupakan fungsi ?

   b. Mana diantara relasi f, g, dan h, yang merupakan fungsi Injektif ?

   c. Mana diantara relasi f, g, dan h, yang merupakan fungsi Surjektif ?

   d. Tentukan Range (f) $\cap$ Range (g)

6. Diketahui $\Sigma = \{a, b\}$ dan Σ^* adalah himpunan semua string yang bisa dibentuk dari anggota-anggota Σ. Didefinisikan fungsi f dan $g : \Sigma^* \rightarrow C$ (bilangan cacah) dengan aturan sbb

   f(w) = jumlah 'a' + jumlah 'b' dalam w

   g(w) = maks (jumlah 'a', jumlah 'b')

$h(w)$ = panjang string 'w'

a. Tentukan Range g

b. Tentukan $f(w) - h(w)$

c. Apakah g merupakan fungsi yang Injektif ? Surjektif ?

7. Sebuah desa dihuni 500 penduduk. Apakah pasti ada paling sedikit 2 penduduk yang berulang tahun pada hari yang sama ?

8. Mana diantara fungsi f,g dan h : $\{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ yang didefinisikan dengan pasangan berurutan berikut ini yang mempunyai invers ?

   $f = \{ (1, a), (2, a), (3, c), (4,d) \}$

   $g = \{ (1, a), (2, c), (3, b), (4, d) \}$

   $h = \{ (1, c), (2, b), (3, d), (4, a) \}$

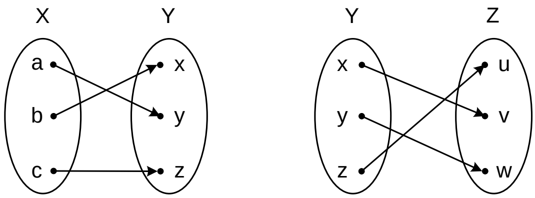
9. Apakah fungsi $f : Z^+ \rightarrow Z^+$ didefinisikan dengan rumus $f(n) = n^2+2$ memiliki invers ? Jika ya, tuliskan invers fungsinya. Jika tidak, jelaskan alasannya.

10. Misalkan f dan g adalah fungsi yang didefinisikan atas himpunan bilangan riil dengan rumus $f(x) = x^2-2$; $g(x) = x+4$. Carilah $f_o g$ dan $g_o f$. Apakah komposisi-komposisi fungsi tersebut Injektif ? Surjektif ?

11. Fungsi $f : R \rightarrow R$ didefinisikan dengan rumus $f(x) = x^3$. Apakah $(f^{-1}{}_o f)(x) = (f_o f^{-1})(x)$?

12. Untuk semua bilangan riil x, didefinisikan fungsi f dan g dengan aturan sebagai berikut : $f(x) = x^3$ dan $g(y) = y-1$. Carilah $g_o f$ dan $f_o g$. Apakah $g_o f = f_o g$?

13. Misalkan $X = \{a, b, c\}$ dan $Y = \{x, y, z\}$. Didefinisikan $f : X \rightarrow Y$ dan $g : Y \rightarrow Z$ dengan diagram panah berikut ini.



Carilah $g_o f$; $(g_o f)^{-1}$; g^{-1} ; f^{-1} dan $(f^{-1} \circ g^{-1})$. Apakah relasi antara $(g_o f)^{-1}$ dengan $(f^{-1} \circ g^{-1})$?

14. Diketahui fungsi f, g, h : C → C (Cacah) dengan aturan sbb

$$f(n) = \begin{cases} 0 & jika\ n\ ganjil \\ 1 & jika\ n\ genap \end{cases}$$

$g(\mathrm{n}) = 2n + 1$

$h(\mathrm{n}) = n + 1$

a. Tentukan $(g_o f)$ (n)

b. Tentukan $(h_o f_o g)$ (n)

c. Mana diantara ketiga fungsi tersebut yang mempunyai invers ?

15. Diketahui $\Sigma = \{a, b\}$ dan Σ^* adalah himpunan semua string yang karakter-karakternya diambil dari Σ. Didefinisikan fungsi f : Σ^* → Z sebagai berikut :

Untuk setiap string s dalam Σ^*, f(s) = jumlah karakter dalam s

Misalkan pula fungsi g : Z → {0, 1, 2} didefinisikan sebagai g(n) = n mod 3

Carilah $(g_o f)$ (abaa), $(g_o f)$ (baaab) dan $(g_o f)$ (aaa).

DAFTAR ISI

DAFTAR PUSTAKA

Jong, J.S. (2008), *Matematika Diskrit dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer, ed 4*, Penerbit Andi

Kenneth, H.R. (1994*), Discrete Mathematics and Its Applications, 3rd ed,* McGraw-Hill

Liu, C.L. (1986), *Elements of Discrete Mathematics, 2nd ed*, McGraw-Hill

Mott, J.L., Kandel, A.K., Baker, T.P. (1986), *Discrete Mathematics for Computer Scientist & Mathematicians*, Prentice Hall

Ross, K.A., Wright, C.R.B. (1992), *Discrete Mathematics, 3rd ed,* Prentice Hall

Susanna, S.Epp (1990), *Discrete Mathematics With Applications*, Wadsworth Inc

Tremblay, J.P., Manohar, R. (1988), *Discrete Mathematical Structures With Applications to Computer Science*, McGraw-Hill

MATEMATIKA DISKRIT

dan Aplikasinya Pada Ilmu Komputer

SINOPSIS

Matematika Diskrit merupakan dasar teori ilmu komputer yang memegang peranan penting dan harus dipelajari oleh setiap orang yang mendalami ilmu komputer. Buku ini disusun untuk membantu memahami materi Matematika Diskrit dan aplikasinya di ilmu komputer sehingga cocok bagi mahasiswa jurusan Ilmu Komputer, Teknik Komputer, Teknik Informatika, Manajemen Informatika, dan orang yang ingin mengetahui lebih dalam tentang Matematika Diskrit. Buku ini cocok dipakai sebagai alat bantu pemahaman materi kuliah Logika Matematika, Matematika Diskrit, Analisa Algoritma, Teori Graf, Kombinatorika, dan materi lain yang berhubungan dengan Matematika Diskrit.

Uraian yang dibahas dalam buku ini lebih banyak ke aplikasi praktis dan pemakaian langsungnya di ilmu komputer. Materi buku ini disusun secara terstruktur dan dilengkapi dengan lebih dari 230 contoh soal dan pembahasannya secara rinci, serta lebih dari 170 soal latihan untuk menguji penguasaan materinya

J.J. Siang